ガロア点理論入門

深澤　知,　 東根　一樹

目次

1　本書の概要

本書は「平面曲線のガロア点」に関する入門書であり, ガロア点研究に取り組むために必要な事項についてまとめている．2 つの研究レベルに対応して 2 つの目的がある．第一の目的はガロア点を研究する最低条件, つまり「ガロア点の定義」に少ない知識でたどり着くことである．第二の目的は, ガロア点研究の第一線に立つために必要な (かつミニマムな) 知識を網羅することである．第一の目的は前半部 (2, 3 章) で達成され, 深澤の山形大学大学院での講義ノートが基になっている．第二の目的は後半部 (4, 5 章) で達成され, 第 2 著者である東根一樹君の修士論文 [9] を基にしている．

平面曲線のガロア点とは, 射影平面内の「点」からの射影により誘導される関数体の拡大がガロア拡大となるときに, その射影の中心点のことを言う．この概念は, 代数多様体の関数体の研究を目的に, 1996 年に吉原久夫氏により導入された．ガロア点の魅力はたくさんあるが例えば, ガロア点理論の基本問題「ガロア点はいくつあるか？」という問題は面白そうだ, と即座に理解していただけるのではないだろうか．実際に, 非特異平面曲線に対するガロア点の個数は決定されていて, その個数によって分類されており, 美しい定理といえると思う (例えば標数零のフェルマー曲線は, ガロア点を曲線の外に 3 個もつ非特異平面曲線として特徴づけられる)．このように「代数多様体の分類の観点」を与えていることが代数幾何におけるひとつの重要な貢献であると思われる．また最近では, 正標数の代数曲線の重要なクラスに必ずと言っていいほどガロア点が関係していることがわかってきた．さらに, 有限体上の有理点や代数幾何符号との関連があり, ガロア点の登場する領域は代数幾何の範囲をすでに越えている．

代数幾何の基礎をマスターしていれば, ガロア点の定義とガロア点理論の基本問題は理解できよう．予備知識が多く必要とされる代数幾何においては, これは極めてまれなケースである．したがって, 修士論文の題材に適している．優秀な学生なら, 学部 4 年生の段階でこの問題と向き合えるかもしれない．深澤が山形大学に赴任してから, ガロア点を題材に修士論文を書く学生を数名送り出してきたが, そこで不満に思っていたのが「ガロア点の定義を一切の妥協なしに理解する」ことが予想以上に難しいことである．(多くのテキストで採用されている) 代数幾何の入門の内容とガロア点の定義に必要な知識はちょっとだけずれていて, このギャップを埋めるのが案外と難しいのである．但しここでは, 修士号を取得して社会に出ていく一般レベルの大学院生を想定している．もしかしたら上記の発言は, 研究者を目指す優秀な学生には奇妙に映るかもしれない．優秀な学生は教員が何も言わなくとも, そういったギャップを自分で埋めてくるのである．したがって前半部は, そ

のギャップを埋めるためのものであり, 修士論文を書いて社会へ出ていく一般大学院生のための入門, と言える. より詳しくガロア点以外の内容を述べれば, Shafarevich [19, I.1, I.2] をベースに, 射影双対性とそれに必要な導分,「射影」に関するいくつかのリマーク, というものである. 代数幾何の入門書をいくつか並べればこれらは包含されることと思うが, 一冊の中にこれだけ少ないページ数で収まっているものは見当たらないと思われる.

後半部では, ガロア点研究に関して必要な知識を具体的に命題として網羅して, それらを用いてガロア点の個数決定の研究方法を紹介する. 前者は一見簡単なように思うかもしれないが, 証明を省いてさえ, 代数幾何ではこのような作業は難しい. そこは東根君の「まとめる」能力の高さが光っている. 東根君が (まさしく上記のようにギャップを埋められる) 優秀な学生だった為, 前半部プラスどれだけミニマムな知識でガロア点研究を実際に行えるか, ということにも注目しながら修士論文を指導したのだが,「結局これだけ必要です」というのが彼の修論であり, 本書の後半部である. (数学の新しい結果を出せる優秀な学生でも「その結果に必要な命題をすべて並べる」のは苦痛であると思う. 東根君の能力があっての後半部であり本書である.) こちらは院生だけでなく研究者がガロア点研究に参入するのに役立つと思う. 手に入れるべき命題を手早く確認できるからである. 後者としては,「ガロア点が 2 つある」状況を理解するため「ガロア点 2 つを伴う双有理埋め込みをもつ」という深澤の判定法を解説し,「ガロア点の個数を確定」するために Weierstrass 点を使った議論 (の一例) を紹介する. 深澤の定理の証明は, 東根君が修士論文で解説したものとほとんど同じ形で記述されている. 初学者には原著論文よりもわかりやすく書かれていると思う. 東根君の名誉のために言うが, 後半部は東根君の修士論文に完全に含まれる.

本書をざっくりとだけ眺めた研究者はガロア点研究は簡単だと誤解するかもしれない. 予備知識が少なく研究に入れるとそのような誤解を生む可能性がある. ガロア点の基本問題に実際に取り組んでみる (本当に紙の上に計算を書いてみる) と, その難しさにすぐに気がつく.「1 点とって射影を計算してみた. その拡大はガロアか？」これはすぐには判定できないであろう. 実はここには落とし穴があって, ガロア点研究の結果の多くは「ガロア点を実際に探してはいない」. 非特異平面曲線の個数決定においては, その証明をみればわかるが,「点を 2 つ先に設定して, それらをガロア点にもつような曲線を見つける」といった立場がとられている. これは創始者である吉原氏のアイデアが光る部分でもある. さらに, ガロア点研究には代数幾何で通常使う感覚とは「別の感覚」が必要とされているようにも見える. 普段あまり詳しく計算しない「射影」に「ガロア群」が組み合わさって, 馴染みのない解析方法をとる必要があるのかもしれない. そもそも “general” という言葉が頻繁に使われる代数幾何においては, 定義からいきなり “special” であることが, 既にこ

れまでの手法との関連のなさを表しているのかもしれない．その「別の感覚」は何なのか具体的に述べることは難しいが, 本書では必要な命題を網羅していることで, そのギャップをいくらか明確にできていると思われる．

本書は「正標数代数曲線入門」という使い方もできる．実際, 説明に使われる具体例は, 標数零より正標数の方が多い．本書の前半部の内容は代数幾何への導入として使われることが多いので, 多くのテキストで標数零を仮定している．研究者レベルでも, 学生時代に標数零で勉強してしまって今さら標数の差を確認するのが億劫だ, という方にも役に立つ可能性がある．正標数においては標数零と異なる現象がたくさん見られるが, 平面幾何というかなり入り口の段階でその現象が現れることはどれほど広く知られているであろうか．平面曲線における正標数の奇妙な現象を予備知識を要せず解説している点は, 他のテキストでは見られない本書の特徴の一つである．また, 紹介されてはいるが証明が度々省略されている「射影双対性」についても証明を与えている．「双対写像が分離的」という仮定の下で正標数でも証明している和文のテキストは, 深澤が知る限りにおいて, 他にはない．

本書が, 代数幾何入門として大学院生の役に立ち, ガロア点研究が広く知られる契機となれば幸いである．そして, ガロア点研究に参入する若い方々が出てきてくれることを願う．

2018 年 12 月 17 日

深澤　知

修正履歴

- (2019 年 4 月 8 日) 誤植修正と文言の些細な修正.
- (2019 年 11 月 1 日) 誤植修正と文言の些細な修正.
- (2020 年 5 月 11 日) 誤植修正 (p.76) と文言の些細な修正 (p.42, 46, 57).
- (2022 年 9 月 14 日) 定理 2.8.9 (2) の証明修正 (p.25), 誤植修正と文言の些細な修正 (p.11, 12, 24, 27, 29, 35, 42, 95, 97).

2 アフィン平面代数曲線

本章は「環と体を使って, 代数曲線を解析する．そして正標数の世界へ」というテーマを掲げた深澤の講義ノートをもとにしている．15 回の講義で概ね終われるようにしてある．学部 3 年生までの代数学の知識は仮定したく, そのような内容は度々証明を略しているが, 後々の議論に必要な定義と命題の主張は必ず述べるようにしてある．

4 節までの環論と体論は雪江 [29] に含まれる．5 節の導分は藤崎 [1] から, 本書に必要な部分を取り出している．6 節から 9 節は Shafarevich [19, I.1, I.2] を参考にしているが, 導分を導入して関数体の元を微分することを加えた点が本書の特徴であろう．それにより, 10, 11 節のような射影双対性に関する議論や正標数での議論が可能となっている．10 節では標数零で「射影双対性」を証明し, 多重接線や変曲点の個数の有限性についても証明している．11 節では, 例を挙げることで, これらすべてが正標数では成り立たないことを観察している．

2.1 環とイデアル

定義 2.1.1. 集合 A に 2 つの演算, 加法 “$+$” と乗法 “$\times$” が定まっていて, 以下の条件をみたすとき, A を (可換) **環**という．

(1) A は加法についてアーベル群である．即ち, 次が成立する:
   - (a) $a+b=b+a \quad (\forall a,b\in A)$;
   - (b) $(a+b)+c=a+(b+c) \quad (\forall a,b,c\in A)$;
   - (c) $0\in A$ が存在して, 任意の $a\in A$ について $a+0=a$ が成立する;
   - (d) 任意の $a\in A$ に対して $a+(-a)=0$ となる $-a\in A$ が存在する．

(2) 乗法について次が成立する:
   - (a) $ab=ba$;
   - (b) $(ab)c=a(bc)$;
   - (c) $1\in A$ が存在して, 任意の $a\in A$ について $a\times 1=a$ が成立する．

(3) (分配法則) $a(b+c)=ab+ac$.

環においては以降, $1\neq 0$ を仮定する．

定義 2.1.2. 環 A であって

$$a,b\in A,\ ab=0\Rightarrow a=0 \text{ または } b=0$$

をみたすものを**整域**という.

定義 2.1.3. A, B を環, $\varphi : A \to B$ を写像とする.

(1) φ が 3 つの条件

(a) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ $(\forall x, y \in A)$;

(b) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ $(\forall x, y \in A)$;

(c) $\varphi(1_A) = 1_B$

をみたすとき, φ を (環の) **準同型**という.

(2) さらに φ が全単射であるとき, φ は (環の) **同型**であるという.

(3) 環 A, B の間に同型が存在するとき, A と B は**同型**であるといい, $A \cong B$ と表す.

定義 2.1.4. A を環, $B \subset A$ とする. $1_A \in B$ であり, B は A の加法と乗法について閉じており, それによって環となるとき, B は A の**部分環**であるという.

定義 2.1.5. A を環とする. 部分集合 $I \subset A$ が次の 3 つの条件をみたすとき, I は A の**イデアル**であるという.

(1) $0_A \in I$.

(2) $x, y \in I \Rightarrow x + y \in I$.

(3) $a \in A,\ x \in I \Rightarrow ax \in I$.

さらに, $I \neq A$ であるイデアル I を真のイデアルという.

A を環, I を A の真のイデアルとする. A 上の関係

$$x \sim y \iff y - x \in I$$

を考える. これは同値関係である. この同値関係による商集合 (同値類全体)

$$A/I = \{x + I \mid x \in A\}$$

は演算

$$(x+I) + (y+I) = (x+y) + I, \quad (x+I)(y+I) = xy + I$$

により環となる.

定義 2.1.6. 上の状況で, A/I を A の I による**剰余環**という.

定義 2.1.7. $\varphi : A \to B$ を環の準同型とする.

(1) $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0_B\}$ を φ の**核**という.

(2) $\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(x) \mid x \in A\}$ を φ の**像**という.

次の補題とその後の準同型定理は証明を省く.

補題 2.1.8. $\varphi : A \to B$ が環の準同型であるとき, $\mathrm{Ker}\ \varphi$ は A の真のイデアルであり, $\mathrm{Im}\ \varphi$ は B の部分環である.

定理 2.1.9 (準同型定理)**.** $\varphi : A \to B$ が環の準同型であるとき, 環の同型

$$A/\mathrm{Ker}\ \varphi \cong \mathrm{Im}\ \varphi$$

が成り立つ.

定義 2.1.10. A を環, S を A の空ではない部分集合とする.

(1) $f \in A$ に対して, $f \in \langle S \rangle$ であることを

ある有限個の元 $f_1, \ldots, f_r \in S$ と $a_1, \ldots, a_r \in A$ が存在して
$f = a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$ が成り立つこと

として定め, 集合 $\langle S \rangle$ を定義する.

(2) $\langle S \rangle$ はイデアルとなる. これを S **が生成するイデアル**といい, S の元を**生成元**という.

(3) $S = \{f_1, \ldots, f_r\}$ のとき, $\langle S \rangle$ を $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, $(f_1, \ldots, f_r)$ ともかく. このとき,

$$\langle S \rangle = \{a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r \mid a_1, \ldots, a_r \in A\}$$

である.

(4) イデアル $I \subset A$ に対して, 有限個の元 $f_1, \ldots, f_r \in A$ が存在して $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ となるとき, I は**有限生成**であるという.

次の補題は証明を省略する.

補題 2.1.11. A を環, S を A の空ではない部分集合とする.

(1) $I \subset A$ をイデアルとする. $S \subset I$ ならば, $\langle S \rangle \subset I$ が成り立つ.

(2) $\langle S \rangle$ が有限生成ならば, ある $f_1, \ldots, f_r \in S$ が存在し, $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \langle S \rangle$ が成り立つ.

補題 2.1.12. A を環とするとき, $\{0\} = \langle 0 \rangle$, $A = \langle 1 \rangle$ が成り立つ.

証明. $\langle 0 \rangle = \{a \times 0 \mid a \in A\} = \{0\}$. $A = \{a \mid a \in A\} = \{a \times 1 \mid a \in A\} = \langle 1 \rangle$. □

定義 2.1.13. A を環, $x_1, \ldots, x_n$ を変数とする.

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \quad (\text{有限和であり，} a_{i_1,\ldots,i_n} \in A)$$

という形の式を A 上の (または, A 係数の) n **変数多項式**という. A 上の多項式全体の集合 $A[x_1, \ldots, x_n]$ は環になり, これを n **変数多項式環**という.

次の定理は学部の講義で省略されることもあり, 環論を初めて学ぶときは重要であるが, 本書では証明を省いて後で利用する.

定理 2.1.14. k を体 (3 節) とするとき, 2 変数多項式環 $k[x, y]$ は一意分解整域である. 即ち, 次をみたす.

(1) 定数ではない多項式は既約多項式の積で表示される.
(2) f が既約で gh を割り切るならば, f は g または h を割り切る.

2.2 ネーター環

定義 2.2.1. A を環とする. A の任意のイデアルが有限生成, つまり, A の任意のイデアル I に対して $f_1, \ldots, f_r$ が存在して $I = \langle f_1, \ldots f_r \rangle$ が成り立つとき, A を**ネーター環**という.

例 2.2.2. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ はネーター環である. 体 (3 節) はネーター環である.

次の定理は重要で証明も易しくはないが, その証明は本書の目的ではないので, 省略する.

定理 2.2.3 (ヒルベルトの基底定理)**.** A がネーター環ならば, 多項式環 $A[x]$ もネーター環である.

系 2.2.4. A がネーター環ならば, 多項式環 $A[x_1, \ldots, x_n]$ もネーター環である.

証明. 定理 2.2.3 より $A[x_1]$ はネーター環である. $A[x_1]$ はネーター環であるから, $A[x_1, x_2] \cong (A[x_1])[x_2]$ は, 再び定理 2.2.3 より, ネーター環である. 帰納法により, $A[x_1, \ldots, x_n]$ がネーター環であることが示される. □

2.3 体

定義 2.3.1. A を環とする．任意の $a \in A \setminus \{0\}$ に対して, ある $b \in A$ が存在して, $ab = 1$ をみたすとき, A は**体**であるという．

補題 2.3.2. (1) 体は整域である．

(2) I が体 K のイデアルならば, $I = \langle 0 \rangle$ または $I = \langle 1 \rangle$ $(= K)$ が成り立つ．

注意 2.3.3. 体 K 上の多項式環はネーター環である (系 2.2.4 と補題 2.3.2 (2) より)．

定義 2.3.4. K, L が体で, $\varphi : K \to L$ が環の準同型であるとき, φ は**体の準同型**であるという．また, φ が環の同型であるとき, φ は**体の同型**であるという．

命題 2.3.5. 体から環への準同型は単射である．特に, 体の準同型は単射である．

次に, 標数について説明する．K を体とする．写像 $\varphi : \mathbb{Z} \to K$ を

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ 1 + \cdots + 1 \quad (n \text{ 個}) & (n > 0) \\ -(1 + \cdots + 1) \ \ (-n \text{ 個}) & (n < 0) \end{cases}$$

と定めると, これは環の準同型となる．

注意 2.3.6. $\mathbb{Z}$ から K への準同型は一意的である．

$\mathrm{Ker}\ \varphi$ は $\mathbb{Z}$ の真のイデアルであり, $\mathbb{Z}$ のすべてのイデアルは 1 つの元で生成されるので,

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = n\mathbb{Z} \quad (n \geq 0,\ n \neq 1)$$

と表示される．環の準同型定理より

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathrm{Im}\ \varphi \subset K$$

が成り立つ．K は体より整域であるので, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が整域となり, n は 0 または素数となる．

定義 2.3.7. 上の状況で, $\mathrm{Ker}\ \varphi = \langle 0 \rangle$ ならば K の標数は 0, $\mathrm{Ker}\ \varphi = \langle p \rangle$ $(p > 0)$ ならば K の標数は p であるという．体 K の標数を $\mathrm{ch}\ K$ とかく．

この節の最後に商体について説明する．A を整域とする．$S = A \setminus \{0\}$ とする．直積集合 $A \times S$ 上に関係 $\sim$ を

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \iff a_1 s_2 - a_2 s_1 = 0$$

によって入れる．$\sim$ は同値関係である．$(a,s) \in A \times S$ の同値類を $\frac{a}{s}$ とかく．これら同値類全体の集合を $Q(A)$ と表す．$\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in Q(A)$ に対して

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}, \quad \frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}$$

によって加法と乗法を定義する．これらは well-defined である (代表元の取り方に依らない).

注意 2.3.8. $\frac{a}{s} \in Q(A), b \in S \Rightarrow \frac{a}{s} = \frac{ab}{sb}$.

次の命題は読者の演習問題とする．

命題 2.3.9. 上の演算により $Q(A)$ は体となる．

注意 2.3.10. 写像 $A \to Q(A); a \mapsto \frac{a}{1}$ は単射準同型である．特に, A は $Q(A)$ の部分環とみなせる．

定義 2.3.11. $Q(A)$ を A の商体という．

例 2.3.12. (1) $\mathbb{Z}$ の商体 $Q(\mathbb{Z})$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ と同型である．

(2) 体 k 上の多項式環 $k[x]$ は整域であり, その商体 $Q(k[x])$ を $k(x)$ とかき, **1 変数有理関数体**という．

$$k(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid g, f \in k[x],\ g \neq 0 \right\}$$

と表される．

2.4 体の拡大

定義 2.4.1. L を体とする．L の部分環 K が (L の部分環としての環構造について) 体であるとき, K は L の**部分体**, L は K の**拡大体**であるという．この状況を L/K と表し, **体の拡大** (が与えられた) という．

定義 2.4.2. L/K を体の拡大とする．

(1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ に対し,

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \left\{ \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \mid f, g \in K[x_1, \ldots, x_n],\ g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 \right\}$$

は体となる ($1/g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L \setminus \{0\}$ の逆元とみよ)．この体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ **が生成する (部分) 体**といい, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を**生成元**という．

(2) 有限個の元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ が存在して $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ となるとき, L は K 上の**有限生成拡大体**という.

定義 2.4.3. L/K を体の拡大とし, $\alpha \in L$ とする.

(1) ある $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ が存在して, $f(\alpha) = 0$ となるとき, α は K **上代数的**であるという.

(2) K 上代数的ではないとき, K 上**超越的**であるという.

(3) α が K 上代数的であるとき, 次の 3 つの条件をみたす $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ を α の K 上の**最小多項式**という.

  (a) $f(\alpha) = 0$.

  (b) $g(x) \in K[x] \setminus \{0\}, g(\alpha) = 0 \Rightarrow \deg f(x) \leq \deg g(x)$.

  (c) $f(x)$ の最高次の係数は 1 である.

(4) L のすべての元が K 上代数的であるとき, L/K は**代数拡大**であるという.

(5) L/K が代数拡大ではないとき (K 上超越的な L の元が存在するとき), L/K は**超越拡大**であるという.

注意 2.4.4. 上の状況で, K 上代数的な元 α の最小多項式は K 上既約である. また, f が K 上の既約多項式で $f(\alpha) = 0$ をみたすならば, f は α の最小多項式の定数倍である.

次の定理は学部の体論の講義で証明される基本的な内容であるので, 証明を省略する.

定理 2.4.5. L/K を体の拡大, $\alpha \in L$ は K 上代数的とし, $f(x)$ を α の最小多項式とする. $K[\alpha] := \{g(\alpha) \mid g(x) \in K[x]\}$ (α で生成された環) とする.

(1) $K[\alpha] = K(\alpha)$ (つまり $K[\alpha]$ は体である).

(2) $K[\alpha] \cong K[x]/\langle f \rangle$.

(3) $K(\alpha)/K$ は代数拡大である.

例 2.4.6. $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ を考えるとき, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体である. $\mathbb{Q}(\pi)$ は超越拡大体である.

次の定理も証明を省略する.

定理 2.4.7. 拡大体の列 $K \subset K(\alpha) \subset K(\alpha, \beta)$ を考える. α は K 上代数的で, β が $K(\alpha)$ 上代数的ならば $K(\alpha, \beta)/K$ は代数拡大である.

定義 2.4.8. (1) 体 K 上の定数ではない任意の多項式が K に根をもつとき, K を**代数閉体**という.

(2) 体の拡大 L/K に対し, L/K は代数拡大でありかつ, L は代数閉体であるとき, L は K の**代数閉包**であるという．このとき, $L = \overline{K}$ とかく．

次の命題は読者への演習問題とする (但し, 後で使う).

命題 2.4.9. 代数閉体は無限個の元を含む.

代数閉包の存在についても認めて議論する.

定理 2.4.10. 体 K の代数閉包は必ず存在し, (K 上の) 同型を除いて一意的である.

例 2.4.11. (1) $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の代数閉包である.

(2) $\mathbb{C}$ は $\mathbb{Q}$ の代数閉包ではない (代数拡大ではないから).

(3) $\overline{\mathbb{Q}} := \{a \in \mathbb{C} \mid a$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的 $\}$ とすると, $\overline{\mathbb{Q}}$ は体となり, $\mathbb{Q}$ の代数閉包となることが証明できる.

定義 2.4.12. K を体, $\overline{K}$ を代数閉包とする.

(1) $f(x) \in K[x] \setminus K$ が $\overline{K}$ で重根をもたないとき, **分離的**または**分離多項式**という.

(2) $\alpha \in \overline{K}$ について, α の K 上の最小多項式が分離的であるとき, α は K **上分離的**であるという.

(3) $K \subset L \subset \overline{K}$ を拡大体の列とする．L のすべての元が K 上分離的であるとき, L/K は**分離拡大**であるという.

注意 2.4.13. K を体, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x] \setminus K$ とし,

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

とする．$f, g \in K[x] \setminus K$ のとき,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

が成り立つ.

証明の概略を説明する．$f = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$, $g = \sum_{j \geq 0} b_j x^j$ と表示する．定義と線形性から, $(fg)' = \sum_{i+j \geq 1} (i+j) a_i b_j x^{i+j-1}$ である．次に f' と g' を定義通り計算した後で $f'g + fg'$ を計算し, 出てきた多項式を比較する.

命題 2.4.14. K を体, $f(x) \in K[x] \setminus K$ とする．f が分離的であるための必要十分条件は, f と f' が共通根をもたないことである.

証明. $\alpha \in \overline{K}$ を $f(x)$ の根とする．$f(x) = (x-\alpha)g(x)$ $(g(x) \in \overline{K}[x])$ と表せる．$g(\alpha) = 0 \iff f'(\alpha) = 0$ を示せばよい．注意 2.4.13 より，$f'(x) = g(x) + (x-\alpha)g'(x)$ となるのでそれがわかる． □

例 2.4.15. (1) $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ は分離的である．$f'(x) = 2x$ であるから，f と f' は共通根を持たない．実際に $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$ でみると，$f(x) = (x+i)(x-i)$ と分解され，重根を持たない．

(2) $f(x) = x^2 + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$ は分離的ではない．$f'(x) = 2x = 0$ であり，f と f' は共通根をもつ．実際，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上で $f = (x+1)^2$ と表せてしまう．

系 2.4.16. K を体，$f \in K[x]$ を既約多項式とする $(\deg f \geq 1)$．$f' \neq 0$ ならば，f は分離的である．

証明. f が分離的ではないとすると，命題 2.4.14 から f と f' は共通根 $\alpha \in \overline{K}$ をもつ．f は既約であるので，α の最小多項式の定数倍となる．$\deg f' < \deg f$ より，$f' = 0$ となる(多項式として)． □

系 2.4.17. K を体，$\mathrm{ch}\ K = 0$，$f \in K[x] \setminus K$ を既約とする．このとき，f は分離的である．特に，$K \subset L \subset \overline{K}$ が拡大体の列のとき，L/K は分離拡大である．

証明. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ とする．$f' = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$ である．f が分離的ではないとすると，系 2.4.16 より，$i a_i = 0$ $(\forall i \geq 1)$ となる．$\mathrm{ch}\ K = 0$ より $a_i = 0$ である．これは $\deg f \geq 1$ であることに反する． □

次の命題も学部の内容であるので証明を省略するが，後で使う．

命題 2.4.18. K を体とする．$\alpha \in \overline{K}$ が K 上分離的ならば，$K(\alpha)/K$ は分離拡大である．

2.5 導分

環 A は体 k を部分環として含むとする．

定義 2.5.1. 写像 $D : A \to A$ が

(1) $D(a) = 0 \quad (\forall a \in k)$;

(2) $D(x+y) = D(x) + D(y) \quad (\forall x, y \in A)$;

(3) (ライプニッツ則) $D(xy) = D(x) \times y + x \times D(y) \quad (\forall x, y \in A)$

をみたすとき, k **上** A **の導分 (微分作用素)** であるという. 以下, 略して k-導分という.

例 2.5.2. $A = k[x]$ とし, $D : k[x] \to k[x]$ を

$$D\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

によって定義する ($a_1 = \cdots = a_n = 0$ のときは $D(a_0) = 0$ と考える). このとき, D は k-導分である. 導分の条件 (1)(2) は定義によりすぐに確かめられ, 条件 (3) は注意 2.4.13 により確かめられる.

命題 2.5.3. $D : A \to A$ が k-導分で, A が体のとき,

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f) \times g - f \times D(g)}{g^2}$$

が成り立つ. (ここで, $g \in A \setminus \{0\}$ に対して, $1/g$ は g の乗法の逆元をあらわし, f/g は $f \times (1/g)$ をあらわす.)

証明. $D(g^{-1}) = -g^{-2}D(g)$ である. 実際, $1 = gg^{-1}$ の両辺に D を施せば

$$0 = D(1) = D(gg^{-1}) = D(g)g^{-1} + gD(g^{-1})$$

となるからである. よって

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f}{g}\right) &= D(f) \cdot \frac{1}{g} + f \cdot D(g^{-1}) = D(f) \cdot \frac{1}{g} + f(-g^{-2}D(g)) \\ &= \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2} \end{aligned}$$

が成り立つ. □

命題 2.5.4. A を整域とし, $D : A \to A$ を k-導分とする. このとき, k-導分 $D^{\sim} : Q(A) \to Q(A)$ であって $D^{\sim}|_A = D$ をみたすものがただ一つ存在する.

証明. 存在すれば一意であることは命題 2.5.3 によりわかる. 存在性を示す. $f, g \in A$, $g \neq 0$ に対して

$$D^{\sim}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2}$$

と定める. これは well-defined である (詳細は読者に委ねる).

$$D^{\sim}\left(\frac{f}{1}\right) = \frac{D(f) \times 1 - f \times D(1)}{1^2} = \frac{D(f)}{1}$$

より $D^{\sim}|_A = D$ である．あとは導分の条件を確かめる．

(1) 任意の $a \in k$ に対して $D^{\sim}(a/1) = D(a)/1 = 0/1$ である．

(2) $g \neq 0,\ g' \neq 0$ をみたす $f, f, g, g' \in A$ に対して

$$
\begin{aligned}
D^{\sim}\left(\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'}\right) &= D^{\sim}\left(\frac{fg' + f'g}{gg'}\right) \\
&= \frac{D(fg' + f'g)(gg') - (fg' + f'g)D(gg')}{(gg')^2}
\end{aligned}
$$

となる．この式の分子をライプニッツ則を使って整理すると (詳細は省く),

$$
(g')^2(D(f)g - fD(g)) + g^2(D(f)g' - f'D(g'))
$$

を得る．したがって,

$$
D^{\sim}\left(\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'}\right) = D^{\sim}\left(\frac{f}{g}\right) + D^{\sim}\left(\frac{f'}{g'}\right)
$$

を得る．

(3)

$$
\begin{aligned}
D^{\sim}\left(\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'}\right) &= D^{\sim}\left(\frac{ff'}{gg'}\right) \\
&= \frac{D(ff')gg' - ff'D(gg')}{(gg')^2}
\end{aligned}
$$

となる．この式の分子をライプニッツ則を使って整理すると,

$$
f'g'(D(f)g - fD(g)) + fg(D(f')g' - f'D(g'))
$$

を得る．したがって,

$$
D^{\sim}\left(\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'}\right) = D^{\sim}\left(\frac{f}{g}\right) \cdot \frac{f'}{g'} + \frac{f}{g} \cdot D^{\sim}\left(\frac{f'}{g'}\right)
$$

を得る． □

例 2.5.5. $A = k[x]$ とすると, $Q(k[x]) = k(x)$ であり, 例 2.5.2 の k-導分 D を使って

$$
D^{\sim} : k(x) \to k(x);\ \frac{f}{g} \mapsto \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2}
$$

が定義される．

定理 2.5.6. K/k を体の拡大とする．$K(\alpha)/K$ が分離拡大であるとし, $D : K \to K$ が k-導分であるとする．このとき, k-導分 $D^\sim : K(\alpha) \to K(\alpha)$ であって $D^\sim|_K = D$ をみたすものがただ一つ存在する．

証明. 存在性について示す．α の最小多項式を $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ とする．

$$f^D = \sum_{i=0}^{n} D(a_i) x^i$$

と定める．f は分離的であるので $f'(\alpha)$ は 0 ではなく,

$$f^D(\alpha) + f'(\alpha) \cdot u = 0$$

をみたす $u \in K(\alpha)$ が一意的に定まる．定理 2.4.5 より $K(\alpha) = K[\alpha] \cong K[x]/\langle f \rangle$ に注意する．$z = g(\alpha) \in K[\alpha]$ に対して

$$D^\sim(z) = g^D(\alpha) + g'(\alpha) \cdot u$$

と定める．

$D^\sim$ が well-defined であることを確認する．$g, h \in K[x]$ とし, $g(\alpha) = h(\alpha)$ をみたすとする．このとき, $g - h$ は f で割り切れる．$g - h = ff_1$ とかける．

$$(ff_1)^D = f^D f_1 + f f_1^D, \ (ff_1)' = f' f_1 + f f_1'$$

であるので

$$\begin{aligned}(ff_1)^D(\alpha) + (ff_1)' \cdot u &= f^D(\alpha) f_1(\alpha) + f'(\alpha) f_1(\alpha) \cdot u \\ &= f_1(\alpha)(f^D(\alpha) + f'(\alpha) \cdot u) = 0\end{aligned}$$

となる．

$$(g-h)^D = g^D - h^D, \ (g-h)' = g' - h'$$

より

$$g^D(\alpha) + g'(\alpha) \cdot u = h^D(\alpha) + h'(\alpha) \cdot u$$

を得る．

$D^\sim$ が導分の条件をみたすことを確認する．$a \in k$ とすれば $a^D = 0, \ a' = 0$ より $D^\sim(a) = 0$ である．$z = g(\alpha), \ w = h(\alpha)$ とする．$z + w = (g+h)(\alpha), \ z \cdot w = (gh)(\alpha)$

である．

$$
\begin{aligned}
D^{\sim}(z+w) &= (g+h)^D(\alpha) + (g+h)'(\alpha)\cdot u \\
&= (g^D + h^D)(\alpha) + (g'+h')(\alpha)\cdot u \\
&= (g^D(\alpha) + g'(\alpha)\cdot u) + (h^D(\alpha) + h'(\alpha)\cdot u) \\
&= D^{\sim}(z) + D^{\sim}(w), \\
D^{\sim}(z\cdot w) &= (gh)^D(\alpha) + (gh)'(\alpha)\cdot u \\
&= (g^D h + g h^D)(\alpha) + (g'h + gh')(\alpha)\cdot u \\
&= (g^D(\alpha) + g'(\alpha)\cdot u)h(\alpha) + g(\alpha)(h^D(\alpha) + h'(\alpha)\cdot u) \\
&= D^{\sim}(z)\cdot w + z\cdot D^{\sim}(w)
\end{aligned}
$$

により導分の条件 (2)(3) が確かめられる．

一意性について示す．$E : K(\alpha) \to K(\alpha)$ を $E|_K = D$ をみたす導分とする．$z = g(\alpha) \in K[\alpha]$ とする．$g = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in K[x]$ と表示しておく．

$$
\begin{aligned}
E(g(\alpha)) &= E\left(\sum_{i=0}^m b_i\alpha^i\right) = \sum_{i=0}^m E(b_i\alpha^i) = \sum_{i=0}^m (E(b_i)\alpha^i + b_iE(\alpha^i)) \\
&= \sum_{i=0}^m E(b_i)\alpha^i + \sum_{i=0}^m b_iE(\alpha^i) = \sum_{i=0}^m D(b_i)\alpha^i + \sum_{i=1}^m ib_i\alpha^{i-1}E(\alpha) \\
&= \sum_{i=0}^m D(b_i)\alpha^i + \left(\sum_{i=1}^m ib_i\alpha^{i-1}\right)E(\alpha) \\
&= g^D(\alpha) + g'(\alpha)E(\alpha)
\end{aligned}
$$

となる (ここで 2 行目の右側の式変形には，$E|_K = D$ と下の補題 2.5.7 を使っている)．したがって，$E(\alpha) = u$ を示せばよい．$f(\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i\alpha^i = 0$ より，$E(\sum_{i=0}^n a_i\alpha^i) = 0$ である．上の式変形と同様にして $f^D(\alpha) + f'(\alpha)E(\alpha) = 0$ を得る．よって，$E(\alpha) = -f^D(\alpha)/f'(\alpha) = u$ である． □

次の補題は読者の演習問題とする．

補題 2.5.7. K/k を体の拡大とし，$D : K \to K$ を k-導分とする．n を正の整数とするとき，$f \in K$ について，$D(f^n) = nf^{n-1}D(f)$ が成り立つ．特に，$p = \mathrm{ch}\ k > 0$ で p が n を割り切るとき，$D(f^n) = 0$ である．

2.6 アフィン空間とザリスキー位相

以下, 特に断らない限り, k を代数閉体とする. また, $k[x_1,\dots,x_n]$ を k 上の n 変数多項式環とする. k の n 個の直積を $\mathbb{A}^n$ とかいて, **アフィン空間**という. $n=2$ のとき, $\mathbb{A}^2$ をアフィン平面という. $k[x_1,\dots,x_n]$ の空ではない部分集合 S に対し,

$$V(S) := \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in S,\ f(a_1,\dots,a_n)=0\}$$

と定める. $S=\{f\}$ のとき, $V(f)$ とかく. $V(S)$ を**代数的集合**という.

注意 2.6.1. $S \subset T \subset k[x_1,\dots,x_n]$ ならば, $V(S) \supset V(T)$ である.

命題 2.6.2. $V(S) = V(\langle S\rangle)$ が成り立つ.

証明. "$\supset$". $S \subset \langle S\rangle$ よりわかる.

"$\subset$". $P \in V(S)$ とする. 任意の $g \in S$ に対して, $g(P)=0$ である. $\forall f \in \langle S\rangle$ に対し, ある $g_1,\dots,g_r \in S$ と $a_1,\dots,a_r \in k[x_1,\dots,x_n]$ が存在し, $f = a_1g_1+\cdots+a_rf_r$ が成り立つ. このとき

$$f(P) = a_1(P)g_1(P)+\cdots+a_r(P)g_r(P) = 0$$

である. よって, $P \in V(\langle S\rangle)$ である. □

系 2.6.3. V が代数的集合であるとき, ある $f_1,\dots,f_r \in k[x_1,\dots,x_n]$ が存在して, $V = V(\{f_1,\dots,f_r\}) = V(f_1)\cap\cdots\cap V(f_r)$ が成り立つ.

証明. $V=V(S)$ とする. 命題 2.6.2 より $V(S)=V(\langle S\rangle)$ である. $k[x_1,\dots,x_n]$ はネーター環 (系 2.2.4) より, ある $f_1,\dots,f_r \in k[x_1,\dots,x_n]$ が存在して $\langle S\rangle = \langle f_1,\dots,f_r\rangle$ が成り立つ. 命題 2.6.2 より, $V(\langle f_1,\dots,f_r\rangle) = V(\{f_1,\dots,f_r\})$ である. 以上より, $V(S)=V(\{f_1,\dots,f_r\})$ を得る. □

命題 2.6.4. 次が成り立つ.

(1) $V(0)=\mathbb{A}^n$, $V(1)=\emptyset$.
(2) $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が代数的集合の族であるとき, 共通部分 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ も代数的集合である.
(3) V_1, V_2 が代数的集合であるとき, 和集合 $V_1\cup V_2$ も代数的集合である.

証明. 証明の概略を述べる. 詳細は読者に委ねる.

(2) 各 $\alpha \in \Lambda$ に対して $V_\alpha = V(T_\alpha)$ $(T_\alpha \subset k[x_1, \dots, x_n])$ としたとき,

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha = V\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha\right)$$

を示す.

(3) $V_1 = V(T_1)$, $V_2 = V(T_2)$ $(T_1, T_2 \subset k[x_1, \dots, x_n])$ としたとき, $T_1T_2 := \{fg \mid f \in T_1, g \in T_2\}$ とし,

$$V(T_1) \cup V(T_2) = V(T_1T_2)$$

を示す. □

定義 2.6.5. (1) 命題 2.6.4 により, 代数的集合を閉集合として (または代数的集合の補集合を開集合として), $\mathbb{A}^n$ は位相空間とみなせる. この位相を**ザリスキー位相**という.

(2) 部分集合 $V \subset \mathbb{A}^n$ (代数的集合をよく考える) に, $\mathbb{A}^n$ の相対位相 (誘導位相) を入れる. これを V のザリスキー位相という.

例 2.6.6. (1) 1 点 $P \in \mathbb{A}^2$ からなる $\mathbb{A}^2$ の部分集合 $\{P\} \subset \mathbb{A}^2$ は代数的集合である. 実際, $P = (\alpha, \beta) \in \mathbb{A}^2$ とすれば, $\{P\} = V(\{x - \alpha,\ y - \beta\})$ である.

(2) $\mathbb{A}^2$ の有限部分集合は代数的集合である. これは (1) と命題 2.6.4 (3) からわかる.

2.7 アフィン平面代数曲線

定義 2.7.1. $f(x, y) \in k[x, y] \setminus k$ とする. $V(f)$ $(\subset \mathbb{A}^2)$ を **(アフィン平面) 代数曲線**という. f が既約であるとき, $V(f)$ は**既約**であるという.

命題 2.7.2. アフィン平面代数曲線 $V(f)$ は無限集合である.

証明. f は x か y のいずれかについて次数 1 以上であるので, x について 1 以上とする.

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i(y)x^i \quad (n \geq 1,\ a_n(y) \neq 0)$$

と表せる. 集合 $\{b \in k \mid a_n(b) = 0\}$ は有限集合で, k は無限体である (命題 2.4.9) ので, $a_n(b_\lambda) \neq 0$ となる $b_\lambda \in k$ が「無限個」存在する. これをみたす各 b_λ に対し, $f(x, b_\lambda)$ は根 a_λ を必ずもつ (k は代数閉体であった). 集合 $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}$ は無限集合であり, これは $V(f)$ の部分集合である. □

注意 2.7.3. k が代数閉体ではないと, 命題 2.7.2 は必ずしも成り立たない. 例えば, $k = \mathbb{R}$, $f = x^2 + y^2$ とすれば, $V(f) = \{(0,0)\}$ となり, $V(f)$ は元を一つしか含まない.

定理 2.7.4. $f, g \in k[x, y]$ とし, f は既約であるとする. f が g を割り切らないならば, $V(f) \cap V(g)$ は有限集合である.

証明. f は x に関して次数 1 以上とする. $f, g \in k(y)[x]$ とみなす. このとき, f は既約である (詳細は読者に委ねる). また, g は f で割り切れない (詳細は読者に委ねる). ユークリッドの互除法により

$$fu + gv = 1$$

をみたす $u, v \in k(y)[x]$ が存在する. 分母を払い,

$$fu^{\sim} + gv^{\sim} = a(y),\ u^{\sim}, v^{\sim} \in k[x, y],\ a(y) \in k[y]$$

と表せる. $f(P) = g(P) = 0$ ならば $a(P) = 0$ である. $a(y)$ の根は有限個であるので, $a(\beta) = 0$ となる β は有限個である. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i(y)x^i$ と表示する. $f(x, \beta)$ が零多項式となるときを考えると, 任意の i に対し, $a_i(\beta) = 0$ であり, f は $y - \beta$ で割り切れる. これは矛盾である. $f(x, \beta)$ は零多項式ではないので, $f(\alpha, \beta) = 0$ となる α は有限個である. 以上より, $f(\alpha, \beta) = g(\alpha, \beta) = 0$ となる (α, β) は有限個である. □

系 2.7.5. $f, g \in k[x, y]$ を既約多項式とする. $V(f) \cap V(g)$ が無限集合であるとき, ある $c \in k$ が存在し, $g = cf$ と表せる. さらにこのとき, $V(f) = V(g)$ である.

系 2.7.6. $V \subset \mathbb{A}^2$ が (ザリスキー位相について) 閉集合ならば次のいずれかである:

(1) $\mathbb{A}^2$;
(2) 既約多項式 f に対する $V(f)$;
(3) 有限集合 ($\emptyset$ を含む);
(4) (2) または (3) の和集合.

証明. $V = V(S)$ とする. $S \subset k$ ならば $V(S) = \mathbb{A}^2$ または $\emptyset$ である. $S \not\subset k$ とする. ある $f \in S$ で $\deg f \geq 1$ となるものが存在する. このとき $V(S) \subset V(f)$ である. $f = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$ を既約分解とすると, $V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_r)$ となる. $S \backslash \{f\} = \emptyset$ ならば (2) または (4) となる. $S \backslash \{f\} \neq \emptyset$ のとき, $g \in S \backslash \{f\}$ をとり, $V(S) \subset \bigcup_i V(g) \cap V(f_i)$ である. 各 i について $V(f_i)$ または有限集合である. S は有限集合としてよいので, 同じ操作を繰り返すと, (2)(3)(4) のいずれかとなる. □

系 2.7.7. $V(f)$ を既約なアフィン平面代数曲線とする. $V(f)$ のザリスキー位相に関する閉集合は次のいずれかである:

(1) $V(f)$;

(2) 有限集合 ($\emptyset$ を含む).

また, 開集合は次のいずれかである:

(1) $\emptyset$;

(2) 有限集合の補集合 ($V(f)$ を含む).

定義 2.7.8. X を位相空間とする. X_1, X_2 が X の閉集合で $X = X_1 \cup X_2$ をみたすならば $X = X_1$ または $X = X_2$ が成り立つとき, X は**既約** (空間) であるという.

命題 2.7.9. $V(f)$ をアフィン平面代数曲線とする. $V(f)$ が既約空間であるための必要十分条件は, f の既約因子がただ一つであることである.

証明. f_1 が既約で, $f = f_1^n$ とかかれるとする. $V(f) = V(f_1)$ である. $V(f)$ が閉集合 X_1, X_2 を使って $V(f) = X_1 \cup X_2$ とかけたとする. $V(f_1) = X_1 \cup X_2$ である. 系 2.7.7 より, X_1, X_2 は有限集合または $V(f_1)$ である. どちらも有限集合であるとすると, $X_1 \cup X_2 = V(f_1)$ とはならないので, $X_1 = V(f_1)$ または $X_2 = V(f_2)$ である. よって $V(f) = V(f_1)$ は既約空間である.

f の既約因子が唯一ではないとする. $f = f_1^n g$ で, g は f で割り切れない, という表示ができる. このとき, $V(f) = V(f_1) \cup V(g)$ である. f_1 は g を割り切らないので, $V(f_1) \cap V(g)$ は有限集合である. $V(f_1)$, $V(g)$ は無限個の元を含むので, $V(f_1) \neq V(f)$, $V(g) \neq V(f)$ である. したがって, $V(f)$ は既約空間ではない. □

注意 2.7.10. (1) X が既約空間, U, V を空ではない開集合とする. このとき, $U \cap V \neq \emptyset$ である. 実際, $U \cap V = \emptyset$ とすれば, $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$ となり, X が既約であることに反する.

(2) X が既約空間であるとし, $U \subset X$ を空ではない開集合とする. U に相対位相を入れる. このとき, U も既約空間である. 詳細は読者にまかせる.

(3) $\varphi : X \to Y$ を連続写像とする. X が既約空間であるとき, $\overline{\varphi(X)}$ ($\varphi(X)$ の閉包) も既約空間である.

2.8 アフィン平面代数曲線上の関数と写像

以下, $C = V(f)$ を既約なアフィン平面代数曲線とする. また, アフィン平面代数曲線を単に曲線ということにする.

定義 2.8.1. (1) 写像 $u : C \to k$ が C **上の正則関数**であるとは, ある $U \in k[x, y]$ が存在して, 任意の $P \in C$ に対して, $u(P) = U(P)$ が成り立つときにいう.

(2) C 上の正則関数全体の集合を $k[C]$ とかき, C の**座標環**という.

命題 2.8.2. (1) $k[C]$ は k を含む整域である.

(2) $k[C] \cong k[x, y]/(f)$.

証明. (2) $\Phi : k[x, y] \to k[C]; U \mapsto U|_C$ は全射である.

$$\begin{aligned}\Phi(U) = \Phi(V) &\iff U|_C = V|_C \\ &\iff (U - V)|_C \\ &\iff U - V \in (f)\end{aligned}$$

が成り立つ (最後の "⇒" は定理 2.7.4 による). よって $k[C]$ は (集合として) 剰余環 $k[x, y]/(f)$ に一致する. したがって, 自然に環となり, $k[C] \cong k[x, y]/(f)$ である.

(1) $k[C]$ が k を含むことは, C 上の定数関数を考えることでわかる. $k[x, y]/(f)$ が整域であることは, f が既約であることからわかる. □

注意 2.8.3. 上記命題は $k[C]$ が環であることを示してから, 準同型定理を用いても示せる.

命題 2.8.4. $u \in k[C]$ とし, $U \in k[x, y]$ は $U|_C = u$ をみたすとする.

$$V_C(u) := \{P \in C \mid u(P) = 0\} = C \cap V(U)$$

が成り立つ.

証明.

$$V_C(u) = \{P \in C \mid u(P) = 0\} = \{P \in C \mid U(P) = 0\} = C \cap V(U)$$

である. □

定義 2.8.5. $C' \subset \mathbb{A}^2$ を既約曲線とする.

(1) 写像 $\varphi : C \to C'$ に対し (または $\varphi : C \to \mathbb{A}^2$ に対し), ある $u_1, u_2 \in k[C]$ が存在して,

$$\varphi(P) = (u_1(P), u_2(P)) \quad (\forall P \in C)$$

が成立するとき, φ は**正則写像**であるという.

(2) さらに, 正則写像 $\psi : C' \to C$ が存在し,

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_C, \ \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{C'}$$

が成立するとき, φ は**同型**であるという.

命題 2.8.6. 正則写像 $\varphi : C \to C'$ は連続である (位相空間の間の写像として).

証明. 任意の閉集合 $F \subset C'$ に対して, $\varphi^{-1}(F) \subset C$ が閉集合であることを示せばよい.

$$F = C' \cap V(G_1) \cap \cdots \cap V(G_r) \quad (G_1, \ldots, G_r \in k[x, y])$$

と表せば

$$\varphi^{-1}(F) = C \cap \varphi^{-1}(V(G_1)) \cap \cdots \cap \varphi^{-1}(V(G_r))$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(V(G_1)) &= \{P \in C \mid \varphi(P) \in V(G_1)\} \\
&= \{P \in C \mid G_1(\varphi(P)) = 0\} \\
&= \{P \in C \mid (G_1(U_1, U_2))(P) = 0\} \\
&= C \cap V(G(U_1, U_2))
\end{aligned}$$

となる (ここで, $\varphi = (U_1, U_2)$, $U_1, U_2 \in k[x, y]$ と表示した). $G_1(U_1, U_2) \in k[x, y]$ であるので, $\varphi^{-1}(V(G_1))$ は C の閉集合である. したがって, $\varphi^{-1}(F)$ は C の閉集合である. □

命題 2.8.7. 正則写像 $\varphi : C \to C'$ に対し, 写像

$$\varphi^* : k[C'] \to k[C]; \ v \mapsto v \circ \varphi$$

は well-defined で, φ^* は k-準同型 (環の準同型で $\varphi^*|_k = \mathrm{id}_k$) である.

証明. well-defined であることを確かめる. $\varphi = (U_1, U_2)$ $(U_1, U_2 \in k[x, y])$ と表示できる. $v \in k[C']$ に対し, $V \in k[x, y]$ をとり $V|_{C'} = v$ であるとする.

$$(v \circ \varphi)(P) = V(U_1, U_2)(P) \quad (\forall P \in C)$$

であり, $V(U_1, U_2) \in k[x, y]$ より, $v \circ \varphi \in k[C]$ である. 環の準同型であることは証明を略す. □

命題 2.8.8. C', C'' を既約曲線とする. $\varphi : C \to C'$, $\psi : C' \to C''$ が正則写像であるとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\psi \circ \varphi$ は正則写像である.

(2) $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ が成り立つ.

証明. (1) $\varphi = (U_1, U_2)$, $\psi = (V_1, V_2)$ と多項式で表示しておけば

$$\psi \circ \varphi = (V_1(U_1, U_2), V_2(U_1, U_2))$$

と表され, 各成分は多項式で表される.

(2) $w \in k[C'']$ として, $(\psi \circ \varphi)^*(w)$ を写像の合成として表示すればわかる. $\square$

定理 2.8.9. (1) C から C' への正則写像全体の集合から, $k[C']$ から $k[C]$ への k 準同型全体の集合への写像 $\Phi : \varphi \mapsto \varphi^*$ は全単射である.

(2) $\varphi : C \to C'$ が同型であるための必要十分条件は, $\varphi^* : k[C'] \to k[C]$ が同型であることである.

証明. (1) まず, $\varphi^* x = x \circ \varphi$, $\varphi^* y = y \circ \varphi$ より,

$$\varphi = (\varphi^* x,\ \varphi^* y)$$

であることに注意する. Φ が単射であることは, $\varphi^* = \psi^*$ であるときに, $\varphi^* x = \psi^* x$, $\varphi^* y = \psi^* y$ であることからわかる. Φ が全射であることを示す. $\alpha : k[C'] \to k[C]$ を k-準同型とする. $u_1 = \alpha(x)$, $u_2 = \alpha(y)$ とする. $v \in k[C']$ を表す多項式を V とすると, V は x, y についての多項式であるので $\alpha(v) = V(u_1, u_2)$ と表せることに注意する. 写像 $\varphi_\alpha : C \to \mathbb{A}^2$ を $P \mapsto (u_1(P), u_2(P))$ によって定める. このとき, $\varphi_\alpha(C) \subset C'$ と $\varphi_\alpha^* = \alpha$ を確かめる. $C' = V(f')$ とする. $f' \in k[C']$ とみると, $\alpha(f') = 0$ である. $f'(u_1(P), u_2(P)) = \alpha(f')(P) = 0$ である. よって, $(u_1(P), u_2(P)) \in C'$ である. $v \in k[C']$ とすると, $\varphi_\alpha^* v = v \circ \varphi_\alpha = V \circ \varphi_\alpha = V(u_1, u_2) = \alpha(v)$ である. 以上より, $\Phi(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha^* = \alpha$ となり, Φ は全射である.

(2) φ が同型であるとする. 即ち, $\psi : C' \to C$ で, $\psi \circ \varphi = 1_C$, $\varphi \circ \psi = 1_{C^*}$ をみたすものがある. このとき

$$\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^* = 1_C^* = 1_{k[C]}$$

である. 同様に, $\psi^* \circ \varphi^* = 1_{k[C']}$ もわかる.

$\varphi^* : k[C'] \to k[C]$ が同型であるとする. β をその逆写像とする. (1) より, ある正則写像 $\psi : C' \to C$ が存在して, $\psi^* = \beta$ である. このとき

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi &= ((\psi \circ \varphi)^* x, (\psi \circ \varphi)^* y) = ((\varphi^* \circ \psi^*)(x), (\varphi^* \circ \psi^*)(y)) \\ &= (1_{k[C]}(x), 1_{k[C]}(y)) = (x, y) = 1_C\end{aligned}$$

である. 同様に $\varphi \circ \psi = 1_{C'}$ であることもわかる. $\square$

定義 2.8.10. $k[C]$ の商体を $k(C)$ と表し, C の**関数体**という.

注意 2.8.11. $u \in k(C)$ とする.

$$u = \frac{h}{g},\ g, h \in k[C],\ g \neq 0$$

とかける. g は $k[C]$ の元として 0 ではないので, 定理 2.7.4 と命題 2.8.4 より, $V_C(g)$ は有限集合である. つまり

$$C \setminus V_C(g) \to k;\ P \mapsto \frac{h(P)}{g(P)}$$

という写像が定義される. これを

$$u : C \dashrightarrow k$$

と表す. このように写像に注目したとき, u を**有理関数**という.

定義 2.8.12. (1) $u \in k(C)$ とし, $P \in C$ とする. u の代表元 $\frac{h}{g}$ をうまくとって $g(P) \neq 0$ とできるとき, u は P **で正則**であるという.

(2) $\mathscr{O}_P := \{u \in k(C) \mid u$ は P で正則 $\}$.

(3) $\mathfrak{m}_P := \{u \in \mathscr{O}_P \mid u(P) = 0\}$.

(4) $\mathrm{Dom}(u) := \{P \in C \mid u$ は P で正則 $\}$. $u = \frac{h}{g}$ と表示するとき, $C \setminus V_C(g) \subset \mathrm{Dom}(u)$ である.

例 2.8.13. $k = \mathbb{C}$, $f = x^2 + y^2 - 1$ とし, $C = V(f)$ を考える. f は既約である (ことの証明は略す). $u = (1-y)/x \in k(C)$ は (この表記では正則にはみえないが) $P = (0,1) \in C$ で正則である. 実際,

$$\frac{1-y}{x} = \frac{1-y^2}{x(1+y)} = \frac{x^2}{x(1+y)} = \frac{x}{1+y}$$

で, 一番右の式には $(0,1)$ を代入できる.

命題 2.8.14. (1) $\mathscr{O}_P$ は $k(C)$ の部分環である.

(2) $\mathfrak{m}_P$ はイデアルである. さらに I が $\mathscr{O}_P$ の真のイデアルならば, $\mathfrak{m}_P$ に含まれる. 特に, $\mathfrak{m}_P$ は $\mathscr{O}_P$ の唯一の極大イデアルである.

(3) $\mathrm{Dom}(u)$ は C の開集合である.

証明. (1) と (2) の前半は読者への演習問題とする. (2) の後半を示す. $I \subsetneq \mathscr{O}_P$ をイデアルとする. $u \in I$ とする. $u = h/g$ $(g(P) \neq 0)$ と表す. $h(P) \neq 0$ とすると, $g/h \in \mathscr{O}_P$ である. よって $1 \in I$, つまり $I = \mathscr{O}_P$ となり, 矛盾する. よって $h(P) = 0$ であり, $u \in \mathfrak{m}_P$ である. したがって, $I \subset \mathfrak{m}_P$ である.

(3) $\mathrm{Dom}(u) \ni P$ とする．ある $g_P, h_P \in k[C]$ が存在し, $u = h_P/g_P$ かつ $g_P(P) \neq 0$ をみたす．よって

$$\mathrm{Dom}(u) = \bigcup_{P \in \mathrm{Dom}(u)} C \setminus V_C(g_P)$$

であり, $\mathrm{Dom}(u)$ は開集合である． □

定義 2.8.15. $C' \subset \mathbb{A}^2$ を既約曲線とする．空ではない開集合 $U \subset C$ と写像 $\varphi_U : U \to C'$ (または $\varphi_U : U \to \mathbb{A}^2$) に対し, ある $u_1, u_2 \in k(C)$ が存在して

$$U \subset \mathrm{Dom}(u_1) \cap \mathrm{Dom}(u_2),\ \varphi_U(P) = (u_1(P), u_2(P))\ (\forall P \in U) \tag{$*$}$$

が成り立つとき, (U, φ_U) は**有理写像** (を与える) という．このとき $\varphi_U : C \dashrightarrow C'$ (または $\varphi_U : C \dashrightarrow \mathbb{A}^2$) とかく．$U$ を明示せず, $\varphi : C \dashrightarrow C'$ などとかくこともある．(U, φ_U) と (V, ψ_V) は

$$\varphi_U|_{U \cap V} = \psi_V|_{U \cap V} \tag{$**$}$$

のとき同じものであるとみなす．($U \cap V \neq \emptyset$ が常に成立していることに注意せよ.)

注意 2.8.16. より厳密に有理写像とは, 集合

$$\{(U, \varphi_U) \mid U \neq \emptyset,\ (*)\ \text{をみたす}\ u_1, u_2\ \text{が存在する}\ \}$$

について, 同値関係 $(**)$ を考えたときの同値類のことである．(推移律の確認が少々面倒ではある.)

命題 2.8.17. 有理写像 $\varphi_U : C \dashrightarrow C'$ に対して, 写像 $\varphi_U : U \to C'$ は連続である．

証明. $u_1, u_2 \in k(C)$ を用いて $\varphi_U = (u_1, u_2)$ と表せる． 各 $P \in U$ に対し, $g_{1P}, h_{1P}, g_{2P}, h_{2P} \in k[C]$ であり, $g_{1P}(P) \neq 0$ かつ $g_{2P}(P) \neq 0$ を満たし,

$$u_1 = \frac{h_{1P}}{g_{1P}},\ u_2 = \frac{h_{2P}}{g_{2P}}$$

となるものがとれる．このとき, $g_{1P}(P)g_{2P}(P) \neq 0$ である．$U_P = U \setminus (U \cap V_C(g_{1P}g_{2P}))$, $\varphi_{U_P} := \varphi_U|_{U_P}$ とする．このとき, $U = \bigcup_{P \in U} U_P$ である．$F \subset C'$ を閉集合とする．

$$\begin{aligned}\varphi_U^{-1}(F) &= \varphi_U^{-1}(F) \cap \bigcup_{P \in U} U_P = \bigcup_{P \in U} \varphi_U^{-1}(F) \cap U_P \\ &= \bigcup_{P \in U} \varphi_{U_P}^{-1}(F)\end{aligned}$$

である．下の補題 2.8.18 により, $\varphi_{U_P}^{-1}(F)$ が閉集合であることを示せばよい．以下は, 読者に委ねる． □

補題 2.8.18. X を位相空間とし, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開集合の族とし, $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ とする. $Y\subset X$ とする. このとき, Y が閉集合であるための必要十分条件は, 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $Y\cap U_\lambda$ が U_λ の閉集合であることである.

証明. Y が閉集合のとき, $Y\cap U_\lambda$ が閉集合であることは, 相対位相の定義から明らかである. 一方, 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して, $Y\cap U_\lambda$ が閉集合であるとする. このとき, X の閉集合 F_λ が存在して, $Y\cap U_\lambda=U_\lambda\cap F_\lambda$ をみたす. このとき

$$Y=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}((X\setminus U_\lambda)\cup F_\lambda)$$

が示されればよい. この等式は読者への演習問題とする. □

定義 2.8.19. (1) 正則写像 $\varphi:C\to C'$ が $\overline{\varphi(C)}=C'$ をみたすとき, φ は**支配的**であるという.

(2) 有理写像 $\varphi_U:C\dashrightarrow C'$ が $\overline{\varphi_U(U)}=C'$ をみたすとき, φ_U は**支配的**であるという.

補題 2.8.20. $\varphi_U:C\dashrightarrow C'$ が支配的であるか否かは開集合 U の取り方に依存しない. つまり, $\varphi_U:C\dashrightarrow C'$, $\psi_V:C\dashrightarrow C'$ が同じ有理写像であるときは,

$$\overline{\varphi_U(U)}=C' \iff \overline{\psi_V(V)}=C'$$

が成り立つ.

証明. $\varphi_U(U)$ が無限集合であるとき, $\psi_V(V)$ が無限集合であることを言えばよい. 逆に, $\varphi_U(U)$ が有限集合であるとき, $\psi_V(V)$ が有限集合であることを言えばよい. これについては, 次の命題の証明をみよ. □

命題 2.8.21. $\varphi_U:C\dashrightarrow\mathbb{A}^2$ を考える. $\overline{\varphi_U(U)}\subset\mathbb{A}^2$ は 1 点または既約曲線である.

証明. $\overline{\varphi_U(U)}$ は $\mathbb{A}^2$ の閉集合であり, さらに既約空間である (注意 2.7.10). したがって, $\overline{\varphi_U(U)}$ は 1 点, 既約曲線, $\mathbb{A}^2$ のいずれかである. $\overline{\varphi_U(U)}\neq\mathbb{A}^2$ であることを示す. $u,v\in k(C)=k(x,y)$ を用いて $\varphi_U=(u,v)$ と表されているとする. $f(x,y)$ は y を含むものとする. u,v がともに k 上代数的であるとき, $u,v\in k$ となり, φ_U は定数写像であるため, $\overline{\varphi_U(U)}$ は 1 点となる. u が k 上超越的であるとする. $k(x,y)/k(x)$ は代数拡大であるから, u は $k(x)$ 上代数的であり,

$$g(x,u):=a_n(x)u^n+\cdots+a_1(x)u+a_0(x)=0,\ a_i(x)\in k[x],\ a_n(x)\neq0\ (n\geq1)$$

とかける (分母を払った). u は k 上超越的であるから, ある i が存在して, $\deg a_i(x)\geq1$ である. $N=\max\{\deg a_i(x)\}$ とする. a_{iN} を, $\deg a_i<N$ のときは 0, $\deg a_i=N$ のと

きは $a_i(x)$ の最高次の係数と定めるとき,

$$\left(\sum_i a_{iN}u^i\right)x^N + (\text{低次の多項式}) = 0$$

を得る. u が超越的であることに注意すれば, この式において x_N の係数は 0 ではなく, x は $k(u)$ 上代数的であることがわかる. このとき, $k(x,u,y)=k(x,y)$ は $k(u)$ 上の代数拡大である. $v \in k(x,y)$ より, v は $k(u)$ 上代数的である. したがって, ある多項式 $h \in k[x,y] \setminus k$ が存在して $h(u,v)=0$ をみたす. これは $\varphi_U(U) \subset V(h)$ を意味するので, $\overline{\varphi_U(U)} \subset V(h) \subsetneq \mathbb{A}^2$ となる. $\square$

次の 2 つの命題と定理は重要ではあるが, 正則写像の場合と重なるところがあるので, 読者への演習問題とする.

命題 2.8.22. $\varphi_U : C \dashrightarrow C'$ を支配的有理写像とする. 写像

$$\varphi_U^* : k(C') \to k(C);\ v \mapsto v \circ \varphi_U$$

は well-defined であり, k-準同型である.

命題 2.8.23. C', C'' を既約曲線とし, $\varphi_U : C \dashrightarrow C'$, $\psi_V : C' \dashrightarrow C''$ を支配的有理写像とする. このとき,

(1) $\psi_V \circ \varphi_U : \varphi_U^{-1}(V) \to C''$ は支配的有理写像を与える.
(2) $(\psi_V \circ \varphi_U)^* = \varphi_U^* \circ \psi_V^*$ が成り立つ.

定理 2.8.24. (1) C から C' への支配的有理写像全体の集合から, $k(C')$ から $k(C)$ への k 準同型全体の集合への写像 $\Phi : \varphi \mapsto \varphi^*$ は全単射である.
(2) 有理写像 $\varphi : C \dashrightarrow C'$ に対して, 有理写像 $\psi : C' \dashrightarrow C$ が存在して

$$\psi \circ \varphi = 1,\ \varphi \circ \psi = 1$$

となる (ある開集合上で恒等写像となる) ための必要十分条件は, $\varphi^* : k(C') \to k(C)$ が同型であることである. (このとき, φ は双有理写像であるという.)

2.9　代数曲線の局所的性質

以下, $C = V(f)$ を既約曲線とする．f_x, f_y で f の (形式的) 偏微分を表す．即ち, $f = \sum_{i\geq 0,\ j\geq 0} a_{ij}x^iy^j$ と表すとき,

$$f_x = \sum_{i\geq 1,\ j\geq 0} ia_{ij}x^{i-1}y^j,\ f_y = \sum_{i\geq 0,\ j\geq 1} ja_{ij}x^iy^{j-1}$$

である．

定義 2.9.1. $P \in C$ に対して $f_x(P) = f_y(P) = 0$ がみたされるとき, P は C の**特異点**であるという．そうではないとき, **非特異点**であるという．

命題 2.9.2. $\mathrm{Sing}(C) := \{P \in C \mid P$ は特異点 $\}$ は有限集合である．

証明. f_x, f_y のいずれかが多項式として 0 でなければ定理 2.7.4 よりわかる．$f_x = f_y = 0$ とする．$(i,j) \neq (0,0)$ ならば $ia_{ij} = ja_{ij} = 0$ である．$p = \mathrm{ch}\ k = 0$ のとき, $a_{ij} = 0$ となり, $f \in k$ とわかる．これは $\deg f \geq 1$ に矛盾する．$p = \mathrm{ch}\ k > 0$ とする．$a_{ij} \neq 0$ ならば, i, j ともに p で割り切れる．したがって,

$$f = \sum_{k,l} a_{kl}x^{pk}y^{pl}$$

とかける．k は代数閉体より $a_{kl} = b_{kl}^p$ となる元 b_{kl} が存在し,

$$f = \sum_{k,l} b_{kl}^p x^{pk}y^{pl} = \left(\sum_{k,l} b_{kl}x^ky^l\right)^p$$

と表せる．これは f が既約であることに反する． □

定理 2.9.3. $P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ とする．

(1) 次をみたす $t \in \mathscr{O}_P$ が存在する:
   (a) $t \in \mathfrak{m}_P$;
   (b) 任意の $u \in k(C) \setminus \{0\}$ に対して, ある $k \in \mathbb{Z}$ と $v \in \mathscr{O}_P \setminus \mathfrak{m}_P$ が存在して, $u = t^kv$ をみたす.

(2) (b) の k は t の取り方に依らずに u に対して一意に決まる．

証明. (1) $P = (\alpha, \beta)$ とし, $f_y(P) \neq 0$ とする．$y - \beta = (x - \alpha)v$ $(v \in \mathscr{O}_P)$ と表示できることを示す．$f(x, y)$ を $x - \alpha, y - \beta$ で展開する ($f^{\sim}(x, y) = f(x + \alpha, y + \beta)$ ととれば

$f^{\sim}(x-\alpha, y-\beta) = f(x,y)$ となる). 2 次以上の項のみからなる多項式 g を用いて

$$f(x,y) = a(x-\alpha) + b(y-\beta) + g(x-\alpha, y-\beta)$$

と表せる. $0 \neq f_y(\alpha,\beta) = b$ である. さらに $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = (x-\alpha)\varphi(x) + (y-\beta)(b + h(x-\alpha, y-\beta)) \quad (h(0,0)=0)$$

と表示できる. $k(C)$ の元としてみれば

$$y-\beta = (x-\alpha)v, \quad v = \frac{-\varphi(x)}{b + h(x-\alpha, y-\beta)} \in \mathscr{O}_P$$

となる. $t = x - \alpha$ とおく. $t \in m_P$ である. この t が条件 (b) をみたすことをみる.

$u \in \mathscr{O}_P \setminus \{0\}$ のとき, $u = t^k w$ $(k \geq 0,\ w \in \mathscr{O}_P \setminus \mathfrak{m}_P)$ と表示できることを示す. $u \notin \mathfrak{m}_P$ なら $u = t^0 u$ である. $u \in \mathfrak{m}_P$ とする. ある $p, q \in k[x,y]$ が存在して

$$u = \frac{p|_C}{q|_C},\ p(P) = 0,\ q(P) \neq 0$$

をみたす. $p^{\sim}(x,y) = p(x+\alpha, y+\beta)$ とすると,

$$p(x,y) = p^{\sim}(x-\alpha, y-\beta) = p^{\sim}(t, tv) = tr\ (r \in \mathscr{O}_P)$$

とかけて,

$$u = t \cdot \frac{r}{q} = tu_1$$

とできる. $u_1(P) = 0$ ならば, 同じ操作を繰り返す. これが有限回の操作で終わることを示す. $u = p/q$ について, p は f で割り切れないので

$$f\xi + p\eta = a$$

をみたす $\xi, \eta \in k[x,y]$, $a \in k[x] \setminus \{0\}$ がとれる. $a = t^k a_0$, $a_0(\alpha) \neq 0$ とする. $p = t^\ell w$ としたとき, $\ell \leq k$ であることを示す. $\ell > k$ と仮定する. $k(C)$ の元として

$$\begin{aligned}
&p\eta = a \\
&\Rightarrow t^\ell w \cdot \eta = t^k a_0 \\
&\Rightarrow t^k(t^{\ell-k} w\eta - a_0) = 0 \\
&\Rightarrow t^{\ell-k} w\eta - a_0 = 0
\end{aligned}$$

をみたす. P を代入すると, $a_0(\alpha) = 0$ となり, 矛盾である. したがって, $\ell \leq k$ である.

$u \in k(C) \setminus \{0\}$ のときを考える．ある $p, q \in k[x, y]$ が存在して

$$u = \frac{p|_C}{q|_C}$$

をたす．$p, q \in \mathscr{O}_P$ より, $p = t^k v$, $q = t^\ell w$ とできる．よって

$$u = t^{k-\ell}\frac{v}{w}, \quad \frac{v}{w} \in \mathscr{O}_P \setminus \mathfrak{m}_P$$

と表示できる．

(2) $t, t' \in \mathfrak{m}_P$ が条件 (b) をみたすとする．$k, \ell \geq 1$ として

$$t' = t^k v, \quad t = (t')^\ell w$$

が成り立つとする．

$$t = (t^k v)^\ell w = t^{kl} v^\ell w$$

であり,

$$t^{kl-1} v^\ell w = 1$$

である．したがって, $k = \ell = 1$ である．$u = t^m z_1 = (t')^n z_2$ と仮定する．$t^m z_1 = (tv)^n z_2$ となり, $t^{m-n} z_1 = v^n z_2$ を得る．よって $m = n$ である． □

定義 2.9.4. 定理 2.9.3 において, t を P での**局所パラメータ** (local parameter) という．また, (b) における k を $\mathrm{ord}_P(u)$ と表す．

命題 2.9.5. $u \in \mathscr{O}_P$, $\mathrm{ord}_P(u) = 1$ ならば u は局所パラメータである．

定理 2.9.6. $P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ とし, $f_y(P) \neq 0$ とする．このとき, 次が成立する．

(1) $x - x(P) \in \mathscr{O}_P$ は P での局所パラメータである;

(2) $x \in k(C)$ $(= k(x, y))$ は k 上超越的であり, $k(C)/k(x)$ は分離拡大である;

(3) 導分 $d/dx : k(C) \to k(C)$ が自然な導分 $k[x] \to k[x]$; $\sum_i a_i x^i \mapsto \sum_i i a_i x^{i-1}$ の拡張として定まる;

(4) $dy/dx = -f_x/f_y$;

(5) $d^2y/dx^2 = \det H(f)/f_y^3$ である．ここで,

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{pmatrix}$$

である．

証明. (1) 定理 2.9.3 の証明よりわかる.

(2) x が k 上代数的であるとする. このとき, $x \in k$ である. ある $c \in k$ が存在して, C 上で $x - c = 0$ となり, これが C の定義多項式となる. よって, $f_y = 0$ となる. $f_y(P) \neq 0$ に矛盾する. よって x は k 上超越的である. $f_y(P) \neq 0$ より, f は変数 y を含む. $f(x, Y)$ は y の $k(x)$ 上の最小多項式 (の定数倍) である. $f_Y(x, Y) \neq 0$ であるので, 系 2.4.16 より, y は $k(x)$ 上分離的である. 命題 2.4.18 より $k(C)/k(x)$ は分離拡大である.

(3) (2) と命題 2.5.4, 定理 2.5.6 よりわかる.

(4) $k(C)$ の元として $f(x, y) = 0$ である. d/dx を作用させると,

$$f_x + f_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

を得る. したがって, $dy/dx = -f_x/f_y$ である.

(5) (4) でさらに d/dx を作用させる.

$$\left(f_{xx} + f_{xy}\frac{dy}{dx}\right) + \left(f_{xy} + f_{yy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + f_y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

となる. したがって

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{1}{f_y}\left\{f_{xx} + 2f_{xy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right) + f_{yy}\left(\frac{f_x}{f_y}\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{f_y^3}\{-f_{xx}f_y^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{yy}f_x^2\} \\
&= \frac{1}{f_y^3}\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を得る. □

定義 2.9.7. $C' = V(g)$ を既約曲線とする. $P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$, $P \in C \cap C'$ とする. $\overline{g} \in k[C]$ とみる.

$$I_P(C, C') := \mathrm{ord}_P(\overline{g})$$

を C と C' の P での**局所交点数**という.

補題 2.9.8. 上の状況で, $P \in C' \setminus \mathrm{Sing}(C')$ でもあるとする. $\overline{f} \in k[C']$ とみる. このとき,

$$\mathrm{ord}_P(\overline{f}) = \mathrm{ord}_P(\overline{g})$$

が成り立つ.

証明. $P=(\alpha,\beta)$ とする．命題 2.9.5 より, $t=a(x-\alpha)+b(y-\beta)$ が C,C' のどちらに対しても P での局所パラメータとなるように, $a,b\in k$ を選ぶことができる．$\overline{g}=t^k(p/q)$, $\overline{f}=t^\ell(s/r)$ とする ($p,q,r,s\in k[x,y]$, いずれも P を代入して 0 ではない)．$k[x,y]$ の元として

$$t^kp-gq=fh_1,\ t^\ell s-fr=gh_2$$

と表せる．$k[C]$ の元として

$$t^kp-gq=0,\ t^\ell s=gh_2$$

と表せるので,

$$t^\ell sq=gqh_2=t^kph_2$$

である．$sq\in\mathscr{O}_P\setminus\mathfrak{m}_P$ より $\ell\geq k$ である．$k[C']$ の元として

$$t^kp=fh_1,\ t^\ell s-fr=0$$

と表せるので,

$$t^kpr=frh_1=t^\ell sh_1$$

である．$pr\in\mathscr{O}_P\setminus\mathfrak{m}_P$ より $k\geq\ell$ である．以上より, $k=\ell$ である． □

命題 2.9.9. $P=(\alpha,\beta)\in C$ とする．

(1) $P\in C\setminus\mathrm{Sing}(C)\iff$ ある直線 ℓ が存在して $I_P(C,\ell)=1$.

(2) $P\in C\setminus\mathrm{Sing}(C)\Rightarrow I_P(C,\ell)\geq 2$ をみたす直線 ℓ がただ一つ存在する．

(3) (2) の直線は

$$f_x(P)(x-\alpha)+f_y(P)(y-\beta)=0$$

で与えられる．これを P での接線といい, T_PC とかく．

証明. $f(x,y)=\sum_{i+j\geq 1}a_{ij}(x-\alpha)^i(y-\beta)^j$ とかける．$f_x(P)=a_{10},\ f_y(P)=a_{01}$ である．

(1) 左から右を示す．$f_y(P)\neq 0$ のとき, $x-\alpha$ は局所パラメータである．$x-\alpha=0$ という直線 ℓ を考えれば, $I_P(C,\ell)=1$ である．右から左を示す．$P\in\mathrm{Sing}(C)$ と仮定する．$f_x(P)=f_y(P)=0$ であり, $\sum$ は $i+j\geq 2$ から始まる．直線の局所パラメータは $x-\alpha$ または $y-\beta$ のいずれかであるので, C との P での局所交点数がいつでも 2 以上であることがわかる．

(2) $f_y(P)\neq 0$ とする．$x-\alpha$ が C の局所パラメータとなる．P を通る直線は

$$\ell_{ab}:a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0\quad((a,b)\neq(0,0))$$

と表される. $b=0$ のとき, $I_P(C,\ell_{a0})=1$ となる. $b\neq 0$ とする. $x-\alpha$ は ℓ_{ab} の局所パラメータにもなる. ℓ_{ab} 上 $y-\beta=-\frac{a}{b}(x-\alpha)$ であり,

$$f(x,-(a/b)(x-\alpha)+\beta)=(x-\alpha)(a_{10}-a_{01}(a/b))+(\text{高次の式})$$

とかかれる.

$$\begin{aligned} I_P(C,\ell_{ab})\geq 2 &\iff a_{10}-a_{01}\frac{a}{b}=0 \\ &\iff \ell_{ab}: f_x(P)(x-\alpha)+f_y(P)(y-\beta)=0 \end{aligned}$$

となり, 主張が得られる. この証明から (3) の主張も導かれる. □

定義 2.9.10. $I_P(C,T_PC)\geq 3$ となる点 $P\in C\setminus \mathrm{Sing}(C)$ を**変曲点**という.

命題 2.9.11. $\mathrm{ch}\, k\neq 2$, $P\in C\setminus\mathrm{Sing}(C)$, $f_y(P)\neq 0$ とする. P が変曲点であるための必要十分条件は $(d^2y/dx^2)(P)=0$ が成り立つことである.

証明. $f(x,y)=\sum_{i+j\geq 1}a_{ij}(x-\alpha)^i(y-\beta)^j$ とかいておく. 偏微分と a_{ij} の関係を見ると,

$$\begin{cases} f_x(P)=a_{10},\ f_y(P)=a_{01} \\ f_{xx}(P)=2a_{20},\ f_{xy}(P)=a_{11},\ f_{yy}(P)=2a_{02} \end{cases}$$

が成り立っている. 命題 2.9.9 (2) と同じ論法で ($p\neq 2$ も注意して),

$$\begin{aligned} I_P(C,\ell_{ab})\geq 3 &\iff \begin{cases} a_{10}-a_{01}\frac{a}{b}=0 \\ a_{20}-a_{11}\frac{a}{b}+a_{22}(\frac{a}{b})^2=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{f_x(P)}{f_y(P)} \\ \frac{1}{2}f_{xx}(P)-f_{xy}(P)\cdot\frac{f_x(P)}{f_y(P)}+\frac{1}{2}f_{yy}(P)\cdot\left(\frac{f_x(P)}{f_y(P)}\right)^2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ. 一番下の式は, $\frac{-1}{2f_y(P)^2}\det H(f)(P)=0$ に等しいので, $I_P(C,T_PC)\geq 3$ であるための必要十分条件は, $\det H(f)(P)=0$, 即ち, $(d^2y/dx^2)(P)=0$ である. □

系 2.9.12. $\mathrm{ch}\, k\neq 2$, $P\in C\setminus\mathrm{Sing}(C)$ とする. P が変曲点であるための必要十分条件は, $\det H(f)(P)=0$ が成り立つことである.

注意 2.9.13. $\mathrm{ch}\, k=p>2$, $x^{p+1}+y^{p+1}+1=0$ で定義される既約曲線を考えるとき, 系 2.9.12 を使って, この曲線上のすべての点が変曲点であることを証明することができる.

2.10 双対写像と双対原理

ここでも, $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$ を既約曲線とする．ある点 $P \in C$ に対して, $f_x(P) \neq 0$ または $f_y(P) \neq 0$ であるので, ここでは「$f_y(P) \neq 0$ となる点 $P \in C$ が存在する」として話を進める．このとき, 多項式としても $f_y \neq 0$ である．

注意 2.10.1. $p = 0$ かつ「f は一次式ではない」ならば f_y は多項式として 0 ではない．したがってこの仮定のもとではいつでも「$f_y(P) \neq 0$ となる点 $P \in C$ が存在する」が成り立つ．

このことを確認する．$f = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^i$ とする．$f_y = \sum_{i=1}^{n} i a_i(x) y^{i-1}$ かつ $f_y = 0$ とする．$f_y = 0$ より $i a_i(x) = 0$ である．$p = 0$ より, $a_i(x) = 0$ である．よって, $f = a_0(x)$ が従う．f は既約であるから, $a_0(x)$ は一次式である．

$f_y(P) = 0$ となる C 上の点は有限個であるから, 開集合 $C \setminus V(f_y)$ 上の点 $P = (\alpha, \beta)$ での接線は

$$f_x(P)(x - \alpha) + f_y(P)(y - \beta) = 0$$

となり,

$$\frac{f_x(P)}{f_y(P)} x + y + \left(-\frac{f_x(P)}{f_y(P)} \alpha - \beta \right) = 0$$

と表せる．

定義 2.10.2. 「$f_y(P) \neq 0$ となる点 $P \in C$ が存在する」と仮定する．写像

$$\gamma : C \setminus V(f_y) \to \mathbb{A}^2;\ (x, y) \mapsto \left(\frac{f_x}{f_y},\ -\frac{f_x}{f_y} x - y \right)$$

(が与える有理写像) を**双対写像** (またはガウス写像) という．

定義 2.10.3. $C^* = \overline{\gamma(C \setminus V(f_y))}$ を**双対曲線**という．

注意 2.10.4. (1) 命題 2.8.21 より C^* は 1 点または既約曲線である．

(2) C が直線であることは, C^* が 1 点であることと同値である．C が直線であるとき 1 点となるのは計算により確かめられる．$C^* = \{L\}$ とする．任意の $P \in C \setminus V(f_y)$ に対して $P \in T_P C = L$ となり, $C \setminus V(f_y) \subset L$ より $C = L$ がわかる．

(3) $\deg f > 1$ のとき, C^* は既約曲線となる．

(4) C^* の定義方程式を $g(z, w) = 0$ とする．ある $Q \in C^*$ が存在して $g_w(Q) \neq 0$ であ

れば, C と同様に, 双対写像

$$\gamma_{C^*} : C^* \setminus V(g_w) \to \mathbb{A}^2;\ (z,w) \mapsto \left(\frac{g_z}{g_w},\ -\frac{g_z}{g_w} z - w \right)$$

が定義される.

以下, この節では k の標数を 0 とする. つぎが, 射影双対性である ("射影" とついているのは本来は次章の定義 3.5.8 と注意 3.5.9 の形で述べられる為である). 証明は Kleiman [14] を参考にしている.

定理 2.10.5 (射影双対性)**.** $\deg f > 1$ とし, $f_y \neq 0$ とする. C^* の定義式を $g(z,w) = 0$ とする. このとき ($g_w \neq 0$ でもあり),

$$C^{**} = C$$

が成立する. さらに, $k(C^*) = k(C)$ である.

証明. 定理 2.9.6 (4) より, $dy/dx = -f_x/f_y$ である. このとき

$$\gamma = \left(-\frac{dy}{dx},\ \frac{dy}{dx} x - y \right)$$

である. それぞれ z, w とおく. これらを x で微分して

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2} \quad \left(= -x\frac{dz}{dx} \right)$$

を得る. ここで $dz/dx = 0$ であれば $dw/dx = 0$ でもあり, ($h(x,z) = 0$ となる多項式 h をとり x での微分を考察することに加えて) 標数 0 であることに注意すれば z と w は定数となることが確かめられる. したがって, $dz/dx \neq 0$ ($\iff$ $dy^2/dx^2 \neq 0$) がわかる. $g(z,w) = 0$ に d/dx を作用させると

$$g_z \frac{dz}{dx} + g_w \frac{dw}{dx} = 0$$

を得る. $g_w = 0$ と仮定すると $dz/dx \neq 0$ より $g_z = 0$ となるが, これはない. よって, $g_w \neq 0$ である. 即ち, z で微分を行うことができる. このとき

$$-\frac{dw}{dz} = -\left(\frac{dw}{dx}\right) / \left(\frac{dz}{dx}\right) = x,$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)z - w = -xz - w = y$$

となる．したがって，$\gamma_{C^*}(C^* \setminus V(g_w)) \subset C$ であり，$C^{**} = C$ である．一方，$k(C) \supset k(C^*) \supset k(C^{**})$ で一番右の体が x, y を含んでいるのでこれらの体はすべて等しい． $\square$

定義 2.10.6. 異なる 2 点 $P_1, P_2 \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ に対して $T_{P_1}C = T_{P_2}C$ がみたされるとき，$T_{P_1}C$ を多重接線という．

定理 2.10.7. $\deg f > 1$ ならば，$C = V(f)$ の多重接線は有限個である．

証明. 定理 2.10.5 の証明にあるように，γ_{C^*} により x, y が復元されているので，$\gamma_{C^*} \circ \gamma$ は C の有限個の点を除いて単射である．よって求める結果を得る． $\square$

定理 2.10.8. C の変曲点は有限個である．

証明. 定理 2.10.5 の証明にあるように，$d^2y/dx^2 \neq 0$ である．命題 2.9.11 より変曲点は $f_y(P) \neq 0$ のときは $(d^2y/dx^2)(P) = 0$ となる点であるから，このような点は有限個である． $\square$

2.11 正標数の平面幾何

標数を $p > 2$ とする．$f(x, y) = x^{2p-1}y - 1$ とし，$C = V(f)$ を考える．f は既約である．

$$f_x = (2p-1)x^{2p-2}y = -x^{2p-2}y, \quad f_y = x^{2p-1}$$

であることに注意する．任意の $P \in C$ で $f_y(P) \neq 0$ であり，すべて非特異点である．また双対写像 γ は

$$\left(-\frac{y}{x},\ x \times \frac{y}{x} - y\right) = \left(-\frac{y}{x},\ 0\right)$$

と計算される．よって，双対曲線 C^* は $g = w = 0$ で定義される．

命題 2.11.1. C^* について，$g_w \neq 0$ であるが，$C^{**} \neq C$ となる．

証明. $g_z = 0,\ g_w = 1 \neq 0$ である．これにより，$\gamma_{C^*} = (0, 0)$ である．よって，$C^{**} = \{(0, 0)\} \neq C$ である． $\square$

命題 2.11.2. C の多重接線は無限個ある．

証明. $P = (x, y) \in C$ に対して $P' := (-x, -y)$ とすれば，$P' \in C$ である．このとき，

$\gamma(P) = \gamma(P')$ である. したがって $P \neq (0,0)$ とすれば, $P \neq P'$ でありかつ $T_P C = T_{P'} C$ となる P' が存在している. □

命題 2.11.3. C の変曲点は無限個ある.

証明. $dy/dx = y/x$ であり,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dx} \times x - y\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{y}{x} \times x - y\right) = 0$$

が成り立つ. 命題 2.9.11 より, 任意の $P \in C$ が変曲点である. □

注意 2.11.4. $(\alpha, \beta) \in C$ での接線は

$$\begin{aligned} & -\alpha^{2p-2}\beta(x-\alpha) + \alpha^{2p-1}(y-\beta) = 0 \\ \Rightarrow & -\alpha^{2p-2}\beta x + \alpha^{2p-1} y = 0 \\ \Rightarrow & -\beta x + \alpha y = 0 \end{aligned}$$

と計算される ($(\alpha, \beta) \in C$ より常に $\alpha \neq 0$ であることに注意せよ). したがって, すべての接線が原点 $(0,0)$ を通る.

定理 2.11.5. (標数が正であっても) $d^2y/dx^2 \neq 0$ ならば, 定理 2.10.5, 2.10.7, 2.10.8 はすべて成立する.

注意 2.11.6. 次は同値である.

(1) $d^2y/dx^2 \neq 0$;

(2) x は $k(z)$ 上分離的である;

(3) $k(C)/k(C^*)$ は分離拡大である.

このとき, C は **reflexive** であるという.

注意 2.11.7. 正標数の射影双対性に関心をもった読者には, 楫氏の解説文 [12] と Kleiman のサーベイ [15] をお薦めする. Hefez, 本間, 楫らの論文に当たれば, 1980 年代から 90 年代前半にかけて, かなり詳細に研究が進んだことが確かめられるであろう. (逆に, 問題はもう残っていないかもしれない.)

3 射影平面代数曲線とガロア点

本章の 3 節までと 5 節は Shafarevich [19, I.1] を参考にして, 本書の目的に必要な解説を加えた. 4 節の射影は, 良く知られていて易しいことではあるのだが, 本書のような入門書では, きちんと言及されていないのではないかと思う. ガロア点の導入に必要である. (また進んだテキストでも, 射影の表現に依らずに中間体が一意であることについて, 詳しく述べられていないように思われる.) 6 節ではガロア点を導入し, 具体例を計算している. 本章を終えた段階で, 射影を計算でき,「ガロア点かどうか」考えることができれば, 本書の目的の半分は果たされたことになる.

本章では k を代数閉体とし, その標数を p で表す.

3.1 射影平面とザリスキー位相

$n+1$ 次元アフィン空間から原点 $(0,\ldots,0)$ を取り除いた集合 $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{(0,\ldots,0)\}$ 上に関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff \text{ある } \lambda \in k\setminus\{0\} \text{ が存在して } x=\lambda y \text{ をみたす}$$

と定める. これは同値関係である. 同値類全体の集合を $\mathbb{P}^n$ とかき, **射影空間**という. $n=2$ のとき, $\mathbb{P}^2$ を射影平面という. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ に, 自然な写像 $\pi:\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{(0,\ldots,0)\}\to\mathbb{P}^n$ による商位相を入れる. これを**ザリスキー位相**という.

注意 3.1.1. この位相の入れ方は一般的ではないと思われる. k が無限集合であることから他の多くのテキストと同値の定義となる. 下の系 3.1.4 を見よ.

定義 3.1.2. $(X_0,\ldots,X_n)\in\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{(0,\ldots,0)\}$ の同値類を $(X_0:\cdots:X_n)$ とかく. この表示を斉次座標という.

以下, 主に $n=2$ の場合を考える. 斉次座標も $(X:Y:Z)$ という表記を頻繁に使う.

命題 3.1.3. $V\subset\mathbb{P}^2$ を部分集合とする. V が閉集合であるための必要十分条件は, ある斉次多項式 $F_1,\ldots,F_r\in k[X,Y,Z]$ が存在して $V=\pi(V(F_1,\ldots,F_r)\setminus\{(0,0,0)\})$ が成り立つことである.

証明. V が閉集合であるとする. 逆像 $\pi^{-1}(V)$ が閉集合であるから, $F_1,\ldots,F_r\in k[X,Y,Z]$ が存在して, $\pi^{-1}(V)=V(F_1,\ldots,F_r)\cap(\mathbb{A}^3\setminus\{(0,0,0)\})$ をみたす. この

とき, $V = \pi(V(F_1,\dots,F_r)\cap(\mathbb{A}^3\setminus\{(0,0,0)\}))$ である．F_{ij} で F_i の j 次斉次成分を表すものとする．$V(F_1,\dots,F_r)=\bigcap_{i,j}V(F_{ij})$ を示す．“$\supset$” は容易である．“$\subset$” を示す．$P\in V(F_1,\dots,F_r)$ とする．$P=(0,0,0)$ なら示すことは何もない．そうではないとする．$P\in\pi^{-1}(V)$ より，任意の $\lambda\in k\setminus\{0\}$ に対して $\lambda P\in\pi^{-1}(V)$ である．つまり，$\lambda P\in V(F_1,\dots,F_r)$ である．よって

$$0=F_i(\lambda P)=\sum_j \lambda^j F_{ij}(P)$$

であり, 一番右の式を λ の多項式とみれば, k が無限体であることから, すべての j に対して $F_{ij}(P)=0$ をみたすことがわかる．

逆に, 条件をみたす斉次式 $F_1,\dots,F_r$ の存在を仮定する．$\pi^{-1}(V)=V(F_1,\dots,F_r)\setminus\{(0,0,0)\}$ を示す． 仮定より $\pi^{-1}(V)=\pi^{-1}(\pi(V(F_1,\dots,F_r)\setminus\{(0,0,0)\}))\supset V(F_1,\dots,F_r)\setminus\{(0,0,0)\}$．$P\in\pi^{-1}(V)$ とする．$\pi(P)\in\pi(V(F_1,\dots,F_r)\setminus\{(0,0,0)\})$ であり, ある $P'\in V(F_1,\dots,F_r)\setminus\{(0,0,0)\}$ が存在して $\pi(P)=\pi(P')$ をみたす．このとき, ある $\lambda\in k\setminus\{0\}$ が存在して $P=\lambda P'$ である．$F_i(P)=F_i(\lambda P')=\lambda^{\deg F_i}F_i(P')=0$ となる． □

系 3.1.4. $V\subset\mathbb{P}^2$ が閉集合であるための必要十分条件は, ある斉次多項式 $F_1,\dots,F_r\in k[X,Y,Z]$ が存在して $V=V(F_1)\cap\cdots\cap V(F_r)$ をみたすことである．但し,

$$V(F_i):=\{(a:b:c)\in\mathbb{P}^2\mid F_i(a,b,c)=0\}$$

と定める．

補題 3.1.5. 多項式 $f(x,y)\in k[x,y]\setminus\{0\}$ に対し,

$$f^\sim := Z^{\deg f}f(X/Z,Y/Z)\in k[X,Y,Z]$$

と定義する．このとき, 次が成立する．

(1) 対応 $f\mapsto f^\sim$ により集合 $k[x,y]\setminus\{0\}$ と集合

$$\{F\in k[X,Y,Z]\mid \text{斉次かつ } Z \text{ で割れない}\}$$

は一対一に対応する．

(2) f が既約である $\iff$ $f^\sim$ が既約である．

(3) g が f の既約因子である $\iff$ $g^\sim$ が $f^\sim$ の既約因子である．

証明. (1) $f^{\sim}$ が斉次であることはすぐにわかる．$f^{\sim}$ が Z で割れないことを示す．f_d で f の $d = \deg f$ の斉次成分を表すとする．$f_d = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i y^{d-i}$ とすれば，$f_d^{\sim} = \sum_{i=0}^{d} a_i (X/Z)^i (Y/Z)^{d-i} Z^d = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i Y^{d-i}$ であり，Z で割れない．f の他の斉次成分に関してこの操作で出てくる斉次多項式は Z で割れる．

次に一対一の対応であることを示す．$f \mapsto f^{\sim} \mapsto f^{\sim}(x,y,1) = f$ であることを示す．$f = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ と表示すれば，$f^{\sim} = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j Z^{\deg f - (i+j)}$ であり，$f^{\sim}(x,y,1) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = f(x,y)$ である．$F \mapsto F(x,y,1) \mapsto F(x,y,1)^{\sim} = F$ であることを示す．$\deg F = d$ とし，$F = \sum_{i=0}^{d} A_i(X,Y) Z^i$ (A_i は $d-i$ 次斉次で $A_0(X,Y) \neq 0$) と表示する．$F(x,y,1) = \sum_{i=0}^{d} A_i(x,y)$ であり，$A_0(X,Y) \neq 0$ より $\deg F(x,y,1) = d$ である．

$$F(x,y,1)^{\sim} = \sum_{i=0}^{d} A_i(X/Z, Y/Z) Z^d = \sum_{i=0}^{d} A_i(X,Y) Z^i = F$$

となり，求めるべき結果が得られた．

(2) "($\Rightarrow$)" を示す．$f^{\sim} = GH$ とする．G, H は斉次多項式である．$f^{\sim}$ が Z で割れないので，G, H も Z で割れない．$f = f^{\sim}(x,y,1) = G(x,y,1)H(x,y,1)$ であり，$\deg G(x,y,1) = \deg G$, $\deg H(x,y,1) = \deg H$ である．f は既約より $\deg G(x,y,1) = 0$ または $\deg H(x,y,1) = 0$ である．したがって，G または H は定数である．

"($\Leftarrow$)" を示す．$f = gh$ とする．$f^{\sim} = g^{\sim} h^{\sim}$ が確かめられる．$f^{\sim}$ は既約より，$g^{\sim}$ または $h^{\sim}$ は定数である．よって $g = g^{\sim}(x,y,1)$ または $h = h^{\sim}(x,y,1)$ は定数である．

(3) "($\Rightarrow$)" を示す．g が f の既約因子であるとする．(2) より $g^{\sim}$ は既約である．$f = gh$ であれば，$f^{\sim} = g^{\sim} h^{\sim}$ であり，$g^{\sim}$ は $f^{\sim}$ の既約因子である．"($\Leftarrow$)" を示す．$g^{\sim}$ が $f^{\sim}$ の既約因子であるとする．$f^{\sim} = g^{\sim} H$ とかける．$f = f^{\sim}(x,y,1) = g^{\sim}(x,y,1)H(x,y,1) = g(x,y)H(x,y,1)$ であり，(2) より g は既約であるので，g は f の既約因子である． □

注意 3.1.6. $F \neq 0$, F が斉次で $F = GH$ のとき，G と H はともに斉次である．

命題 3.1.7. $f \in k[x,y] \backslash \{0\}$, $U_Z = \{(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^2 \mid Z \neq 0\}$ とし，写像 $\varphi : \mathbb{A}^2 \to U_Z$; $(x,y) \mapsto (x:y:1)$ を考える．

(1) φ は全単射である．

(2) $\varphi(V(f)) = V(f^{\sim}) \cap U_Z$ である．

(3) U_Z に $\mathbb{P}^2$ の相対位相を入れれば，φ は同相写像である．

証明. (1) は容易である．(2) は，$(x,y,1) \in U_Z$ に対して $f(x,y) = f^{\sim}(x,y,1)$ であることからわかる．

(3) φ は, 写像 $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^3 \setminus \{((0,0,0)\}; (x,y) \mapsto (x,y,1)$ と写像 $\pi : \mathbb{A}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2$ の合成写像として表現できるので, 連続である. φ が閉写像であることは (2) よりわかる. □

$X \neq 0$ で定義される開集合 U_X, $Y \neq 0$ で定義される開集合 U_Y についても同様のことが成り立つ. またこのとき, $\mathbb{P}^2 = U_X \cup U_Y \cup U_Z$ が成り立っている.

3.2 射影平面代数曲線

定義 3.2.1. $F(X,Y,Z) \in k[X,Y,Z] \setminus k$ を斉次多項式とする. $V(F)$ を**射影 (平面代数) 曲線**という. F が既約であるとき, $V(F)$ は**既約**であるという.

命題 3.2.2. F, G は斉次多項式で, F は既約であるとする. F が G を割り切らないとき, $V(F) \cap V(G)$ は有限集合である.

証明. F は既約であるので, Z で割れないとしてよい. $G = Z^r H$ (H は Z でも F でも割れない斉次多項式) とする.

$$\begin{aligned} V(F) \cap V(G) &= V(F) \cap (V(Z^r) \cup V(H)) \\ &= (V(F) \cap V(Z)) \cup (V(F) \cap V(H) \cap U_Z) \end{aligned}$$

である. $V(F) \cap V(Z)$ は有限集合である. また, $V(F) \cap V(H) \cap U_Z$ と $V(F(x,y,1)) \cap V(H(x,y,1))$ は一対一に対応しており, アフィンのときの結果から, 後者は有限集合である. □

命題 3.2.3. $V \subset \mathbb{P}^2$ が閉集合ならば次のいずれかである.

(1) $\mathbb{P}^2$;
(2) $V(F)$ (F は既約な斉次多項式);
(3) 有限集合 ($\emptyset$ を含む);
(4) (2) または (3) の和集合.

証明. アフィンのときと同じである. ポイントは命題 3.2.2 である. □

系 3.2.4. $V(F)$ (F は既約斉次多項式) に相対位相を入れる. $V(F)$ の閉集合は次のいずれかである.

(1) $V(F)$;
(2) 有限集合 ($\emptyset$ を含む).

命題 3.1.7 の写像 φ により $\mathbb{A}^2$ と U_Z を同一視する.

命題 3.2.5. 対応 $V(f) \mapsto V(f^{\sim})$ により, 集合 $\{\mathbb{A}^2$ の既約曲線 $\}$ と集合

$$\{\mathbb{P}^2 \text{ の既約曲線で } V(Z) \text{ ではない } \}$$

は一対一に対応する. また, $\overline{V(f)} = V(f^{\sim})$ である.

証明. "$\overline{V(f)} = V(f^{\sim})$" であることは, "$\subset$" が容易にわかることと系 3.2.4 による. □

命題 3.2.6. F を定数ではない斉次多項式とする. $V(F)$ が既約空間であることは F の既約因子がただ一つであることと同値である.

証明. $V(F)$ が既約空間であると仮定する. F は Z で割れないと仮定してよい. 仮定より, $V(F) \cap U_Z = V(F(x, y, 1))$ は既約空間である. 命題 2.7.9 より, $F(x, y, 1) = g^l$ (g は既約) とかける. $F = F(x, y, 1)^{\sim} = (g^{\sim})^l$ である. 補題 3.1.5 (2) より $g^{\sim}$ は既約である.

$F = G^l$ (G は既約斉次) とする. $V(F) = V(G^l) = V(G)$ である. G は Z で割れないとしてよい. $V(G) \cap U_Z = V(G(x, y, 1))$ である. 補題 3.1.5 (2) より, $G(x, y, 1)$ は既約であり, 命題 2.7.9 より, $V(G(x, y, 1))$ は既約空間である. $V(F) = V(G) = \overline{V(G(x, y, 1))}$ より, $V(F)$ も既約空間となる. □

3.3 射影平面代数曲線上の関数と写像

この章では以下, $C \subset \mathbb{P}^2$ を既約な射影平面代数曲線とし, $C \cap U_Z \neq \emptyset$ を仮定する. $C_X = C \cap U_X$, $C_Y = C \cap U_Y$, $C_Z = C \cap U_Z$ とする. これらは (空集合でなければ) 既約なアフィン平面代数曲線と考えることができる (命題 3.1.7).

定義 3.3.1. $k(C) = k(C_Z)$ と定める. $k(C)$ を C の**関数体**という.

注意 3.3.2. $x' = X/Y$, $z' = Z/Y$ とする. $k(C_Z) = k(x, y)$, $k(C_Y) = k(x', z')$ であるが,

$$x \mapsto \frac{x'}{z'}, \quad y \mapsto \frac{1}{z'}$$

という対応でこれらは同型である. (x と x'/z' は $P \in U_Z \cap U_Y$ で同じ値を出力するので, $x = x'/z'$, $y = 1/z'$ とみることで, $k(C_Z) = k(C_Y)$ と考えることができる.) したがって, $k(C)$ は U_Z, U_Y, U_X の取り方に依存しない.

定義 3.3.3. (1) $u \in k(C)$ とし, $P \in C$ $(\subset \mathbb{P}^2)$ とする．ある $U_i \in \{U_X, U_Y, U_Z\}$ とある $g, h \in k[C \cap U_i]$ が存在して

$$P \in U_i,\ u = \frac{h}{g} \ \text{かつ}\ g(P) \neq 0$$

が成り立つとき, u は P で正則であるという.

(2) $\mathscr{O}_P := \{u \in k(C) \mid u$ は P で正則 $\}$.

(3) $\mathfrak{m}_P := \{u \in \mathscr{O}_P \mid u(P) = 0\}$.

(4) $\mathrm{Dom}(u) := \{P \in C \mid u$ は P で正則 $\}$.

補題 3.3.4. (1) $u \in k(C)$, $P \in U_Y \cap U_Z$ とする．このとき,

$$\begin{aligned} &\text{ある } g_Y, h_Y \in k[C \cap U_Y] \text{ が存在して } u = h_Y/g_Y \text{ かつ } g_Y(P) \neq 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\text{ある } g_Z, h_Z \in k[C \cap U_Z] \text{ が存在して } u = h_Z/g_Z \text{ かつ } g_Z(P) \neq 0. \end{aligned}$$

(2) $P \in C \cap U_Z$ であるとき, $\mathscr{O}_P$ は $C \cap U_Z$ に対して定義した $\mathscr{O}_P$ と同型である.

証明. (1) $g_Z, h_Z \in k[C \cap U_Z]$ の存在を仮定する.

$$g_Z(x, y) = g_Z(x'/z', 1/z') = \frac{1}{z'^m} g_{ZY}(x', z'),\ g_{ZY} \in k[x', z']$$

と表示される．同様に,

$$h_Z(x, y) = \frac{1}{z'^n} h_{ZY}(x', z').$$

よって

$$\frac{h_Z}{g_Z} = \frac{h_{ZY}(x', z')}{g_{ZY}(x', z')} \times z'^{m-n}.$$

$g_{ZY}(P) = (z'^m g_Z)(P) \neq 0$, $z'^{|m-n|}(P) \neq 0$ より, 条件をみたす g_Y, h_Y が (g_{ZY}, h_{ZY} のいずれかに $z'^{|m-n|}$ をかけたもの) としてとれる.

(2) (別の開集合でとって正則となる関数が増えることのみが問題であるが, それはないことが) (1) よりわかる. □

定義 3.3.5. $C' \subset \mathbb{P}^2$ を既約曲線とする．空ではない C の開集合 U, $U_i \in \{U_X, U_Y, U_Z\}$, 写像 $\varphi_U^i : U \to C' \cap U_i$ (または $\varphi_U^i : U \to U_i$) に対し, $u_1, u_2 \in k(C)$ が存在して

$$U \subset \mathrm{Dom}(u_1) \cap \mathrm{Dom}(u_2),\ \varphi_U^i(P) = (u_1(P), u_2(P))\ (\forall P \in U)$$

が成立するとき, (U, φ_U^i) は**有理写像** (を与える) という．このとき $\varphi_U^i : C \dashrightarrow C'$ (または $\varphi_U^i : C \dashrightarrow \mathbb{P}^2$) とかく．また, (U, φ_U^i) と (V, ψ_V^j) は, ある開集合 $W \subset U \cap V$ が存在

して $\varphi_U^i|_W = \psi_V^j|_W$ をみたすとき, 同じものとみなす. (より厳密に有理写像とは, 同値類である.)

定義 3.3.6. φ が与える有理写像 (の同値類) を $[\varphi]$ とかく.

命題 3.3.7. (1) いずれかが 0 ではない 3 つの斉次多項式 F_0, F_1, F_2 は (0 であるか) 次数がすべて等しく, $C \not\subset \bigcap_i V(F_i)$ が成り立つとする. (この条件を $(*)$ とかく.) このとき写像

$$C \setminus \left(\bigcap_i V(F_i) \right) \to \mathbb{P}^2;\ P \mapsto (F_0(P) : F_1(P) : F_2(P))$$

は有理写像 $C \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ を与える.

(2) (1) に記述した条件 $(*)$ をみたす組 (F_0, F_1, F_2) 全体の集合に

$$(F_0, F_1, F_2) \sim (G_0, G_1, G_2) \iff \forall i, j, \forall P \in C,\ (F_i G_j - F_j G_i)(P) = 0$$

という関係を入れると, これは同値関係であり, 同値であるとき同じ有理写像を与える.

(3) $(*)$ をみたす組 (F_0, F_1, F_2) と (G_0, G_1, G_2) が同じ有理写像を与えるならば, $(F_0, F_1, F_2) \sim (G_0, G_1, G_2)$ である.

(4) 任意の有理写像 $[\varphi_U^i]$ に対し, $(*)$ をみたす (F_0, F_1, F_2) と開集合 $V \subset U$ が存在し,

$$\forall P \in V,\ \varphi_U^i(P) = (F_0(P) : F_1(P) : F_2(P))$$

が成り立つ.

証明. (1) $C \not\subset V(F_2)$ としてよい. $C \setminus V(F_2)$ 上では $P \mapsto ((F_0/F_2)(P) : (F_1/F_2)(P) : 1)$ とかける. $(C \setminus V(F_2)) \cap U_Z \neq \emptyset$ よりこの写像は

$$P \mapsto \left(\frac{F_0(x,y,1)}{F_2(x,y,1)}(P) : \frac{F_1(x,y,1)}{F_2(x,y,1)}(P) : 1 \right)$$

で与えられる. $F_0(x,y,1), F_1(x,y,1), F_2(x,y,1) \in k[C \cap U_Z]$ であり,

$$F_i(x,y,1)/F_2(x,y,1) \in k(C) \text{ かつ } (C \setminus V(F_2)) \cap U_Z \subset \mathrm{Dom}(F_i(x,y,1)/F_2(x,y,1))$$

である $(i = 0, 1)$.

(2) 前半は証明を略す. $(F_0, F_1, F_2) \sim (G_0, G_1, G_2)$ を仮定する. $C \not\subset V(F_2)$ と仮定してよい. このとき, (C 上で) $F_2 G_0 = F_0 G_2$, $F_2 G_1 = F_1 G_2$ に注意すれば, $C \not\subset V(G_2)$ で

あることがわかる．このとき, 点 $P \in C \setminus (V(F_2) \cup V(G_2))$ に対して

$$\begin{aligned}(F_0(P):F_1(P):F_2(P)) &= (F_0(P)G_2(P):F_1(P)G_2(P):F_2G_2(P)) \\ &= (F_2(P)G_0(P):F_2(P)G_1(P):F_2G_2(P)) \\ &= (G_0(P):G_1(P):G_2(P))\end{aligned}$$

が成り立つ．

(3) 仮定より, ある開集合 $U \subset C$ が存在して

$$(F_0(P):F_1(P):F_2(P)) = (G_0(P):G_1(P):G_2(P)) \quad (\forall P \in U)$$

が成り立つ．$C \not\subset V(F_2)$ と仮定してよい．このとき $C \not\subset V(G_2)$ でもある．

$$(C \setminus V(F_2)) \cap (C \setminus V(G_2)) \cap U \cap U_Z \neq \emptyset$$

より, この開集合上で

$$P \mapsto \left(\frac{F_0(x,y,1)}{F_2(x,y,1)}(P):\frac{F_1(x,y,1)}{F_2(x,y,1)}(P):1\right) = \left(\frac{G_0(x,y,1)}{G_2(x,y,1)}(P):\frac{G_1(x,y,1)}{G_2(x,y,1)}(P):1\right)$$

となる．よって C のある開集合上で

$$F_0(x,y,1)G_2(x,y,1) - F_2(x,y,1)G_0(x,y,1) = 0,$$

つまり

$$(F_0G_2 - F_2G_0)(x,y,1) = 0$$

である．開集合は稠密であるから, これは C 上で成立する．他の F_i, G_j についても同様の等式が証明され, $(F_0,F_1,F_2) \sim (G_0,G_1,G_2)$ である．

(4) $\varphi_U^Z : U \to U_Z$ について考えればよい．φ_U^Z が U 上で $u_1, u_2 \in k(C)$ により $\varphi(P) = (u_1(P):u_2(P):1)$ と表されているとする．$u_1 = h_1/g_1$, $u_2 = h_2/g_2$ $(g_1,h_1,g_2,h_2 \in k[C \cap U_Z])$ とかける．$U \cap (U_Z \setminus V(g_1g_2)) \neq \emptyset$ である．この開集合上で写像

$$P \mapsto (h_1g_2(P):g_1h_2(P):g_1g_2(P))$$

は φ_U^Z と一致する．h_1g_2, g_1h_2, g_1g_2 の最高次にそろえて斉次化すれば, 求めるものを得る． □

3.4 点からの射影とその計算

$C \subset \mathbb{P}^2$ を既約斉次多項式 F で定義された射影曲線とし, $f(x,y) = F(x,y,1)$ とする.

定義 3.4.1. F_1, F_2 を 1 次斉次式とし, $V(F_1) \cap V(F_2)$ は 1 点 $P \in \mathbb{P}^2$ から成るとする. 有理写像 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1; Q \mapsto (F_1(Q) : F_2(Q))$ を点 P からの射影という.

補題 3.4.2. (1) $\deg F \geq 2$ ならば, 射影により $k(C)/k$ の k ではない中間体が得られる. それを $\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ とかく. $k(C) = k(C \cap U_Z) = k(x,y)$ とかけば, $\pi_P^* k(\mathbb{P}^1) = k(F_1(x,y,1)/F_2(x,y,1))$ である.

(2) (1) の中間体は P を定義する式 F_1, F_2 の取り方に依らない. 特に $P = (\alpha : \beta : 1)$ とすれば, $\pi_P^* k(\mathbb{P}^1) = k((x-\alpha)/(y-\beta))$ である.

証明. (1) $\deg F \geq 2$ より, $F_2(x,y,1) \neq 0$ ($k(C)$ の元として) である.

$$F_1(x,y,1)/F_2(x,y,1) \in k$$

と仮定すると, ある $\alpha \in k$ が存在し, $k(C)$ の元として, $F_1(x,y,1) - \alpha F_2(x,y,1) = 0$ となる. これは多項式としても成立することになり, $V(F_1) \cap V(F_2)$ が無限集合となる.

(2) $P = (\alpha : \beta : 1)$ とするとき, $k(F_1/F_2) = k((x-\alpha)/(y-\beta))$ が示されればよい. $F_2(x,y,1) = a(x-\alpha) + b(y-\beta)$ とする. ここで, a, b のいずれかは 0 ではない. $a \neq 0$ とする. F_1 を F_2 で割ると, $F_1 = dF_2 + e(y-\beta)$ をみたす $d, e \in k$ で, $e \neq 0$ をみたすものがある. ここで, $F_1/F_2 = d + e(y-\beta)/F_2$ である. 体の生成元の取り換えで,

$$k\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = k\left(\frac{e(y-\beta)}{F_2}\right) = k\left(\frac{y-\beta}{F_2}\right)$$

を得る. F_2 を $y-\beta$ で割って係数を調整すれば $k((x-\alpha)/(y-\beta))$ を得る. □

注意 3.4.3. $P = (0:0:1)$ であれば $\pi_P = (X:Y)$ であり, $\pi_P^* k(\mathbb{P}^1) = k(x/y)$ である. U_Y の座標 x', z' に関しては, $x/y = x'$ であり, $k(C) = k(x', z')$, $\pi_P^* k(\mathbb{P}^1) = k(x')$ である. 実際の計算では, このような見方の方が計算しやすい. 例えば, $P = (1:0:0)$ のときは, $k(C) = k(x,y)$, $\pi_P^* k(\mathbb{P}^1) = k(y)$ であるため, 本書ではこの表記を頻繁に使用する.

この注意にあるように, $P = (1:0:0)$ として, 次を得る.

命題 3.4.4. $\deg F \geq 2$ とする.

(1) $f(X,y) \in k(y)[X]$ は x の $k(y)$ 上の最小多項式 (の定数倍) である.

(2) $[k(C):\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)] = \deg_x f \ (\le \deg f)$.

(3) $[k(C):\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)] = \deg f \iff P \notin C$.

(4) $[k(C):\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)] = \deg f - 1 \iff P \in (C \cap U_X) \setminus \mathrm{Sing}(C \cap U_X)$.

証明. (1) f は $k[x,y]$ の元として既約であり, x を含むので, $k(y)[x]$ の元としても既約である.

(2) (1) よりわかる.

(3) $F = \sum_i a_i(Y,Z)X^i$ と表示する. $[k(C):\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)] = \deg f \iff a_{\deg f} \in k \setminus \{0\} \iff F(1,0,0) \neq 0$.

(4) (3) の表示を使って

$$\begin{aligned} & [k(C):\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)] = \deg f - 1 \\ \iff & a_{\deg f} = 0 \text{ かつ } a_{\deg f - 1} \text{ は } 0 \text{ ではない } Y, Z \text{ の } 1 \text{ 次式} \\ \iff & F(1, y'', z'') \text{ は } y'', z'' \text{ の } 1 \text{ 次の項からはじまる} \\ \iff & P = (1:0:0) \text{ は } C \cap U_X \text{ の非特異点} \end{aligned}$$

がわかる. □

注意 3.4.5. $[k(C):\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)]$, $\deg f$,「$P \in C$ であるか否か」は $\mathbb{P}^2$ の射影変換で不変である. したがって, (3)(4) は P の座標によらずに正しい ($P = (\alpha:\beta:1)$ などの形であっても). C の非特異性については次の節で再度議論する.

3.5 射影平面代数曲線の特異点

多項式 $f(x,y)$, 斉次多項式 $F(X,Y,Z)$ に対して, f_x, F_X で (形式的な) 偏微分を表す.

補題 3.5.1. $F \in k[X,Y,Z] \setminus \{0\}$, $f = F(x,y,1)$ とする. このとき, $f_x = F_X(x,y,1)$, $f_y = F_Y(x,y,1)$ である.

証明. $F(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^d a_i(Y,Z)X^i$ と表す. $f(x,y) = \sum_{i=0}^d a_i(y,1)x^i$ である. $F_X = \sum_{i=1}^d a_i(Y,Z)iX^{i-1}$ より $F_X(x,y,1) = \sum_{i=1}^d a_i(y,1)ix^{i-1} = f_x(x,y)$ を得る. f_y についても同様である. □

補題 3.5.2 (オイラーの公式)**.** F を斉次多項式とし, $\deg F = d \ge 1$ とする. このとき $dF = XF_X + YF_Y + ZF_Z$ が成立する.

証明. $F = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk}X^iY^jZ^k$ とする. $XF_X = (\sum a_{ijk}iX^{i-1}Y^jZ^k) \times X =$

$\sum ia_{ijk}X^iY^jZ^k$ であるから, $XF_X + YF_Y + ZF_Z = \sum(i+j+k)a_{ijk}X^iY^jZ^k = dF$ をみたす. □

定義 3.5.3. $V(F) \subset \mathbb{P}^2$ を既約射影曲線とし, $P \in V(F) \cap U_Z$ とする. P が**特異点**であるとは, $P \in V(F(x,y,1)) \subset \mathbb{A}^2$ の意味で特異点であるときに言う.

命題 3.5.4. $P \in V(F)$ を上の設定とする. P が特異点であるための必要十分条件は, $P \in V(F, F_X, F_Y, F_Z)$ が成り立つことである.

証明. $f = F(x,y,1)$ とする. P が特異点であるとする. $f_x(P) = f_y(P) = 0$ である. 補題 3.5.1 より $F_X(P) = F_Y(P) = 0$ である. オイラーの公式より $F_Z(P) = 0$.

$F(P) = F_X(P) = F_Y(P) = F_Z(P) = 0$ を仮定する. 補題 3.5.1 より $f_x(P) = f_y(P) = 0$ である. □

注意 3.5.5. $P \in V(F)$ が特異点であることは, U_X, U_Y, U_Z の取り方によらない.

系 3.5.6. $P \in \mathbb{P}^2$ とし, F は既約斉次多項式とする. また, 標数 p は 0, または p が $\deg F$ を割らないと仮定する. このとき, P が $V(F)$ の特異点であることは, $P \in V(F_X, F_Y, F_Z)$ が成り立つことと同値である.

証明. オイラーの公式と命題 3.5.4 からわかる. □

命題 3.5.7. $C = V(F)$ を既約射影曲線, $P = (\alpha : \beta : 1) \in C \cap U_Z$ を非特異点とし, $f = F(x,y,1)$ とおく. P における接線 $V(h_P); h_P = f_x(P)(x-\alpha) + f_y(P)(y-\beta)$ に対して,

$$h_P^{\sim} = F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z$$

である.

証明. 補題 3.5.1 より $f_x(P) = F_X(P)$, $f_y(P) = F_Y(P)$ であるから, オイラーの公式にも注意して,

$$\begin{aligned} h_P^{\sim} &= F_X(P)(X - \alpha Z) + F_Y(P)(Y - \beta Z) \\ &= F_X(P)X + F_Y(P)Y + Z(-\alpha F_X(P) - \beta F_Y(P)) \\ &= F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z \end{aligned}$$

を得る. □

定義 3.5.8. 既約射影曲線 $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2$ に対して, 有理写像

$$\gamma : V(F) \dashrightarrow \mathbb{P}^2;\ (F_X : F_Y : F_Z)$$

が定まる. これを**双対写像**という.

注意 3.5.9. γ は定義 2.10.2 においてアフィン曲線に対して定義した双対写像 (の射影化) と一致する. 実際,

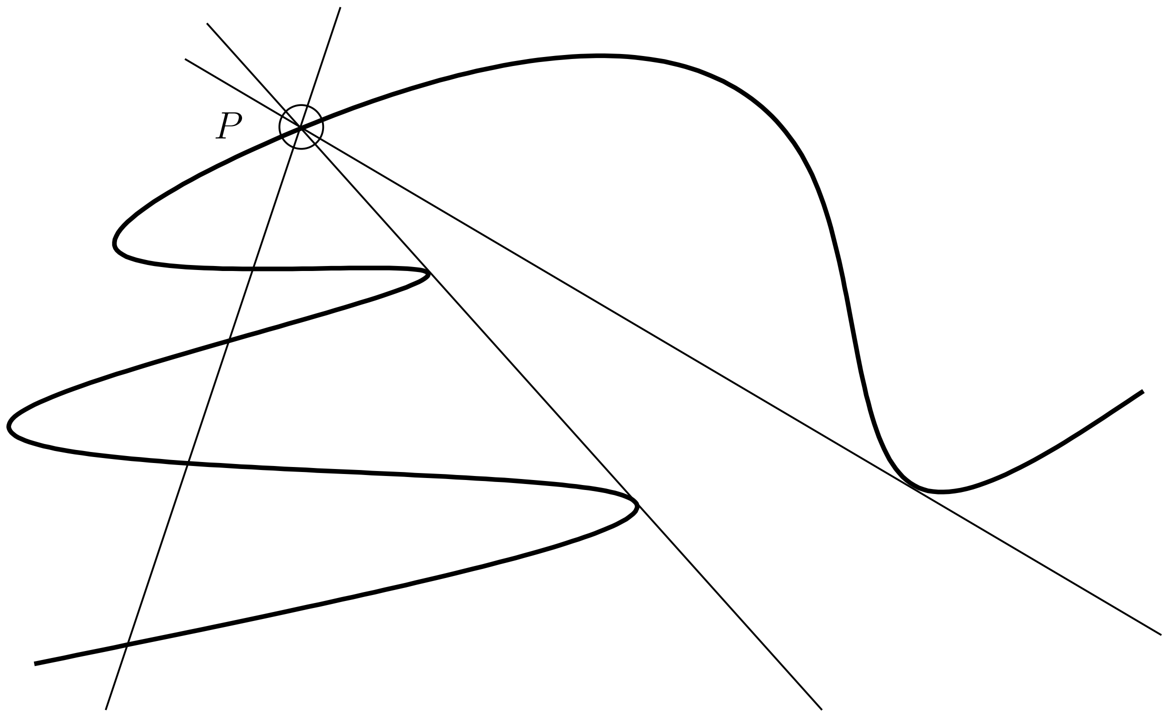
$$\begin{aligned}\left(\frac{f_x}{f_y} : 1 : -\frac{f_x}{f_y}x - y\right) &= (f_x : f_y : -xf_x - yf_y) \\ &= (F_X(x,y,1) : F_Y(x,y,1) : F_Z(x,y,1))\end{aligned}$$

である. γ の像の閉包を C^* とかけば, $p = 0$ のとき, $C^{**} = C$ が成り立つ.

3.6 ガロア点 (基本用語と具体例)

F を次数 2 以上の既約斉次多項式, $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2$ とする. 点 $P \in \mathbb{P}^2$ に対し, 射影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ を考える.

定義 3.6.1 (吉原, 1996)**.** 関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ がガロア拡大であるとき, P を C の**ガロア点**という.



注意 3.6.2. 本書ではガロア拡大を定義していなかった. 正確な定義は雪江 [29] などを確認して頂きたい. ここではガロア理論に関する深い知識は要求しない. 学部 3 年生で学ぶ「ガロアの基本定理」くらいまでの知識があれば十分である.

例 3.6.3 (吉原 [18])**.** $p=0, C=V(X^3Z+Y^4+Z^4)$ とする. ($X^3Z+Y^4+Z^4$ が既約であることはアイゼンシュタインの判定法などで確認できる.) $P=(1:0:0)\in V(Y)\cap V(Z)$ とする. P は C のガロア点である.

それを確認する. $\pi_P=(Y:Z)=(y:1)$ と計算される. $k(C)=k(x,y)$, $\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)=k(y)$ である. $k(C)=(k(y))(x)$ であり, $x^3+y^4+1=0$ をみたす. 命題 3.4.4 (1) から $X^3+y^4+1\in k(y)[X]$ は x の最小多項式である. (また, (4) から, P は C の非特異点である.) $x, \omega x, \omega^2 x$ ($\omega^2+\omega+1=0$) は X^3+y^4+1 のすべての根であり, これらはすべて $k(C)$ に含まれる.

定義 3.6.4. (1) $P\in C$ が非特異かつガロア点であるとき, 内ガロア点であるという.

(2) $P\in\mathbb{P}^2\setminus C$ がガロア点であるとき, 外ガロア点であるという.

(3) 内ガロア点の個数を $\delta(C)$, 外ガロア点の個数を $\delta'(C)$ と表す.

(4) P がガロア点のとき, $G_P:=\mathrm{Gal}(k(C)/\pi_P^*k(\mathbb{P}^1))$ と定める.

例 3.6.5. 例 3.6.3 の例では, $G_P\cong\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である.

注意 3.6.6. $[L:K]=2$ のとき, 体の拡大 L/K は分離拡大ならいつでもガロア拡大であるため, 内ガロア点のときは $\deg F\geq 4$ を, 外ガロア点のときは $\deg F\geq 3$ を仮定する.

注意 3.6.7. P をガロア点とする.

(1) $\mathrm{Gal}(k(C)/k(\mathbb{P}^1))=\mathrm{Aut}_{k(\mathbb{P}^1)}k(C)$

$$=\{\sigma:k(C)\to k(C)\mid \sigma \text{ は同型で, } \sigma|_{k(\mathbb{P}^1)}=\mathrm{id}_{k(\mathbb{P}^1)}\}$$

であった.

(2) $|\mathrm{Gal}(k(C)/k(\mathbb{P}^1))|=[k(C):k(\mathbb{P}^1)]$.

(3) $\mathrm{Bir}(C)$ で C から自分自身への双有理写像全体を表すとする. $\mathrm{Bir}(C)$ と, $k(C)$ から $k(C)$ への同型写像全体は一対一に対応するので, 単射準同型 $G_P\hookrightarrow\mathrm{Bir}(C)$ が存在する.

問題 3.6.8. (1) 与えられた曲線 C に対して, $\delta(C)$ と $\delta'(C)$ を求めよ.

(2) $\delta(C)$ や $\delta'(C)$ が大きい曲線にはどのようなものがあるか? (実際には, $\delta(C)\geq 2$ や $\delta'(C)\geq 2$ の例でも現在は構成が難しい.)

例 3.6.9. 例 3.6.3 の曲線については, $\delta(C)=4$, $\delta'(C)=1$ であることが知られている (三浦–吉原 [18, 24]).

例 3.6.10 (深澤–長谷川 [4])**.** $p \geq 5$ とし, $C = V(YZ^{p-1} - X^p)$ とする. $\delta(C)=\infty$, $\delta'(C)=\infty$ である (ことが知られている). より詳しくは, $C \cap U_Z$ のすべての点が内ガロア点で, $\{Z=0\} \setminus \{(1:0:0),(0:1:0)\}$ のすべての点が外ガロア点である.

ここでは, $\alpha \in k\setminus\{0\}$ としたとき, 点 $P=(1:\alpha:0) \in \{Z=0\}\setminus\{(1:0:0),(0:1:0)\}$ が外ガロア点であることを示す. $P \notin C$ であることは $F = YZ^{p-1} - X^p$ に代入してみればわかる. $\pi_P = (Y-\alpha X : Z) = (y - \alpha x : 1)$ である. $t = y - \alpha x$ とすれば,

$$k(C)/k(\mathbb{P}^1) = k(x,y)/k(t) = k(x,t)/k(t).$$

x は

$$F(x, \alpha x + t, 1) = (\alpha x + t) - x^p = -x^p + \alpha x + t = 0$$

をみたす. (“$=0$” の前の多項式が最小多項式となる.) 集合 $A = \{x+\beta \mid -\beta^p + \alpha\beta = 0\}$ が最小多項式の根全体となる. 実際,

$$\begin{aligned} -(x+\beta)^p + \alpha(x+\beta) + t &= -x^p + \alpha x + t + (-\beta^p + \alpha\beta) \\ &= -x^p + \alpha x + t = 0 \end{aligned}$$

であり, A の元の個数は p である. $A \subset k(x,t)$ より, $k(x,t)/k(t)$ はガロア拡大である.

例 3.6.11 (本間 [11])**.** $p \geq 3$ とし, $C = V(X^pZ + XZ^p - Y^{p+1})$ とする. $\delta(C) = p^3+1$ であることが知られている. より詳しくは, 点 $P \in \mathbb{P}^2$ に対し,

$$P \text{ が } C \text{ のガロア点} \iff P \text{ が } \mathbb{F}_{p^2}\text{-有理点}$$

である.

ここでは, $P \in C$ が $\mathbb{F}_{p^2}$-有理点であるとき, ガロア点であることを示す. まず, $P \in \{Z=0\}$ のときを考える. このとき $P=(1:0:0)$ である. $\pi_P = (y:1)$, $k(C)/k(\mathbb{P}^1) = k(x,y)/k(y)$, $x^p + x - y^{p+1} = 0$ を得る. 例 3.6.10 と同様にガロアとわかる. 次に $P \notin \{Z=0\}$ のときを考える. $\alpha^p + \alpha = \beta^{p+1}$ をみたす $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{p^2}$ が存在し, $P = (\alpha:\beta:1)$ と表される. $u = x-\alpha$, $v = y - \beta$, $t = u/v$ とおくと,

$$\pi_P = (x-\alpha : y-\beta) = (u:v) = (u/v:1) = (t:1)$$

となる. ここで体の拡大の等式

$$k(C)/k(\mathbb{P}^1) = k(u,v)/k(t) = k(v,t)/k(t)$$

が成り立つ. $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ を $f = x^p + x - y^{p+1} = 0$ に代入すると

$$u^p + u - v^{p+1} - \beta v^p - \beta^p v = 0$$

を得, さらに $u = tv$ を代入して

$$t^p v^p + tv - v^{p+1} - \beta v^p - \beta^p v = 0$$
$$v^p + (-t^p + \beta) v^{p-1} + (-t + \beta^p) = 0$$

を得る. $\beta \in \mathbb{F}_{p^2}$ より $(-t + \beta^p)^p = -t^p + \beta^{p^2} = -t^p + \beta$ に注意して

$$v^p + (-t + \beta^p)^p v^{p-1} + (-t + \beta^p) = 0.$$

$(-t + \beta^p) v^p$ で割ると,

$$\frac{1}{-t + \beta^p} + (-t + \beta^p)^{p-1} \frac{1}{v} + \left(\frac{1}{v}\right)^p = 0.$$

$1/v = w$ とおけば ($k(v,t) = k(w,t)$ に注意して)

$$w^p + g^{p-1} w + h = 0 \quad (g, h \in k(t))$$

という形をしている. 集合 $\{w + \gamma g \mid \gamma^p = -\gamma\}$ が根の全体となることが計算によって確かめられ, この集合が $k(w,t)$ に含まれることがわかるため, ガロアであることがわかる.

注意 3.6.12. ここでは素朴な発想で「複数の点がガロア点かどうか」確認できる 2 例を紹介した. ねらいは「複数点を同時に計算するのは大変だと実感してもらう」ことである. 後者の例でそれを実感して頂きたい. 誤解して頂きたくないのは, 後者の計算が大変なのは「正標数のせいではない」ということである. むしろ, 正標数であることで計算が簡単になっている. 標数零ではそもそもガロア点があまり多く出てこないので, この感覚を説明できる例がおもいつかなかった.

3.7 ガロア点研究の流れ

ガロア点は 1996 年に吉原久夫氏により導入された. 氏は, 当時, 代数多様体の関数体における部分体研究の一環として, 代数曲線の「ゴナリティ」の一般化である代数曲面の「非有理次数」($\mathbb{P}^2$ への有理写像のなかで拡大次数が最小の値) を研究していた.「代数曲線のゴナリティを与える射がいつガロアとなるか？」という問題に当たったらしい. 非特異平面曲線のゴナリティを与える射は曲線上の点からの射影である, という事実 (ネーター, 難波) が知られており, そのことがガロア点の導入につながったようである.

1996 年 12 月に, 新潟大学の吉原研究室の院生数名に, ガロア点の概念, 非特異 4 次平面曲線のガロア点および一般点でのガロア閉包の考察, 与えられた 4 次曲線の各点にガロア閉包曲線が対応するファミリーの構成, について話したそうである (この話は三浦敬氏に伺った). 論文としては, 三浦敬氏との共著論文 [18] により初めてガロア点が公になり, これらの結果は [18, 25] に含まれる形で 2000 年代に入ってから出版されている.

2000 年代前半の吉原研究室の勢いはすさまじく, 吉原氏, 三浦氏, 高橋剛氏を中心に, この時期に大量の論文が出版されており, 2006 年頃には一つの理論として確立された印象がある. 非特異平面曲線において基盤構築の後, 高次元超曲面への一般化 (超曲面のガロア点), 正規曲面への一般化, 余次元の一般化 ($\mathbb{P}^3$ 内の曲線に対するガロア直線), 特異曲線のガロア点研究, などの進展がある. 一般次元の非特異射影多様体に対するガロア埋め込みを導入した吉原氏の論文 [26] は 2007 年に出版されている.

ガロア点誕生から 10 年後の 2006 年頃に本間正明氏が Hermitian 曲線のガロア点配置を決定し, 正標数においてもガロア点研究が始まる. 深澤も正標数の平面曲線のガロア点配置研究に参入した. また, 深澤と長谷川武博氏の共同研究により, 無限個のガロア点をもつ平面曲線が分類された. 標数零では, 吉原氏, 三浦氏, 高橋氏により「ガロア点と射影平面の双有理変換」の研究が進展した. また 2011 年頃, 白根竹人氏により, 5 次曲線のガロア閉包曲線のファミリーが構成された.

20 年後の 2016 年前後には, 三浦氏, 大渕朗氏, 春井岳氏により「ガロア点と自己同型群」の関係, 高橋氏, 米田二良氏により「Weierstrass 点への一般化」の研究が進められている. R. Auffarth 氏により, アーベル多様体のガロア埋め込みの研究が進展した. 深澤は「一般標数におけるガロア点の個数上限」と本書 (定理 5.1.1) にある「ガロア点 2 つを伴う双有理埋め込みの存在判定」という形で貢献した. 一方で 2015 年に, 深澤, 三浦氏, 高橋氏の 3 名によりガロア点の一般化である「準ガロア点」が導入され, その基礎理論が整備されている.

ガロア点の基本問題「(平面曲線の) ガロア点はいくつあるか？」(特に標数零) に焦点を絞れば, 非特異平面曲線, 射影の次数が素数の場合, 有理曲線について 2006 年頃までに十分な結果が得られている (吉原氏, 三浦氏, C. Duyaguit 氏). 吉原氏, Duyaguit 氏, 金沢光則氏により (主に 4 次の) 楕円曲線に対してガロア直線配置, および外ガロア点配置が調べられている. また, (講演概要で出版されてはいないが 2011 年頃) 高橋氏が, 特異点が 1 つまたは 2 つという仮定のもとで, ガロア点をもつ平面曲線を分類している. 深澤は 2016 年に, 射影が素数次の結果を「次数が 2 でも 3 でも割れない」状況に一般化している. 一方, 本書で解説している定理 5.1.1 を使って, ガロア点を複数もつ平面曲線の新しい例が得

られている. 標数零では「内ガロア点 4 個, 外ガロア点 3 個」が最大個数であると予想されているが, 未だに完全には解決されていない.

2008 年頃までの研究の進展については深澤のサーベイ論文 [2] がある. また, 吉原氏と深澤によるガロア点の未解決問題集 [27] にはガロア点の研究論文が網羅されている.

文責: 深澤　知

4　代数幾何の一般論

本章からは, 集合論・位相空間論・群論・環論・体論の基礎と考えられる [17], [28], [29] の内容は既知とする．また, 体の拡大における超越基底・超越次数についての理論 [30, §1.1] は既知とする．本章では証明を書かないが, ガロア点研究に必要と思われる命題を網羅する．基本的には, 代数幾何のテキストを順当に読めば, すべて補うことが可能であろう．但し, 一冊の本で補うのは難しいと思われる．本書では, Fulton [6], Hartshorne [8], 梶原 [13], 今野 [16], Stichtenoth [21] を参考にした．

以下, k を代数閉体とする．

4.1　アフィン多様体

定義 4.1.1. $\mathbb{A}^n$ の既約閉部分集合に誘導位相を入れたものをアフィン多様体という．さらに, アフィン多様体の開部分集合を準アフィン多様体という．

$\mathbb{A}^n$ の代数的集合と $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルの関係について述べる．$\mathbb{A}^n$ の部分集合 Y に対して, そのイデアル $I(Y)$ を

$$I(Y) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid \text{すべての } P \in Y \text{ に対して } f(P) = 0\}$$

と定める．次のヒルベルトの零点定理が代数的集合とイデアルの対応を明らかにする．

定理 4.1.2. $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ が成立する．

系 4.1.3. $\mathbb{A}^n$ の代数的集合と, $k[x_1, \ldots, x_n]$ の根基イデアルの間の対応 $Y \mapsto I(Y)$, $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ はそれぞれ互いの逆を与える．また, これらの対応はいずれも包含関係を逆にする．さらに, 代数的集合はそのイデアルが素イデアルであるとき, またそのときに限り, 既約である．

アフィン多様体の次元は次のように定義される．

定義 4.1.4. アフィン多様体 $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ に対して, Y の座標環 $k[Y]$ を $k[x_1, \ldots, x_n]$ の $I(Y)$ による剰余環 $k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)$ として定める．さらに, Y の次元 $\dim Y$ を $k[Y]$ の商体 $Q(k[Y])$ の k 上の超越次数として定義する : $\dim Y = \mathrm{tr.deg}_k Q(k[Y])$.

4.2 射影多様体

射影代数的集合の概念を導入する. $k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ を k 上の $n+1$ 変数多項式環とする. 多項式 $F = F(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in k[X_0, \ldots, X_n]$, $P \in \mathbb{P}^n$ について, P のすべての斉次座標 $P = (a_0 : \cdots : a_n)$ に対して, $F(a_0, \ldots, a_n) = 0$ となるとき, P を F の零点であるといい, $F(P) = 0$ と表す.

定義 4.2.1. 部分集合 $T \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ に対して, T の射影零点集合 $V(T)$ を

$$V(T) := \{P \in \mathbb{P}^n \mid \text{すべての } F \in T \text{ に対して } F(P) = 0\}$$

と定める. 部分集合 $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ に対して, ある $T \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ があって, $Y = V(T)$ となるとき, Y を射影代数的集合という. また, $\mathbb{P}^n$ 上のザリスキー位相を, 開部分集合として射影代数的集合の補集合をとることにより定義する.

定義 4.2.2. $\mathbb{P}^n$ の既約閉部分集合に誘導位相を入れたものを射影多様体という. 射影多様体の開部分集合を準射影多様体という.

次に, 射影代数的集合と $k[X_0, \ldots, X_n]$ のイデアルの関係について述べる. $\mathbb{P}^n$ の部分集合 Y に対して, そのイデアル $I(Y)$ を

$$I(Y) := \{F \in k[X_0, \ldots, X_n] \mid \text{すべての } P \in Y \text{ に対して } F(P) = 0\}$$

と定める. $I(Y)$ は $k[X_0, \ldots, X_n]$ の斉次イデアルである. ここで, $k[X_0, \ldots, X_n]$ のイデアルが斉次イデアルであるとは, そのイデアルの生成系として斉次多項式のみからなる集合がとれることをいう. アフィンの場合と同様に, 射影代数的集合と斉次イデアルには対応がある.

定理 4.2.3. $\mathfrak{a}$ を $k[X_0, \ldots, X_n]$ の斉次イデアルとし, $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$ とするとき, $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ が成立する.

系 4.2.4. $\mathbb{P}^n$ の射影代数的集合と, $k[X_0, \ldots, X_n]$ の斉次根基イデアルであって $\langle X_0, X_1, \ldots, X_n \rangle$ と異なるものの間の対応 $Y \mapsto I(Y)$, $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ はそれぞれ互いの逆を与える. また, これらの対応はいずれも包含関係を逆にする. さらに, 射影代数的集合はそのイデアルが斉次素イデアルであるとき, またそのときに限り, 既約である.

射影多様体における次元の概念は後に定義することにする.

4.3 射

はじめに, 準アフィン多様体, 準射影多様体それぞれの上の正則関数を定義する.

定義 4.3.1. $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ を準アフィン多様体とする. 関数 $f : Y \to k$ が点 $P \in Y$ において正則であるとは, P を含む Y の開集合 U と多項式 $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ が存在して, h は U 上いたるところ 0 でなく, かつ U 上で関数として $f = g/h$ となっていることをいう. f が Y のすべての点で正則であるとき, Y 上正則であるという.

定義 4.3.2. $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ を準射影多様体とする. 関数 $f : Y \to k$ が点 $P \in Y$ において正則であるとは, P を含む Y の開集合 U と次数の等しい斉次多項式 $G, H \in k[X_0, \dots, X_n]$ が存在して, H は U 上いたるところ 0 でなく, かつ U 上で関数として $f = G/H$ となっていることをいう. f が Y のすべての点で正則であるとき, Y 上正則であるという.

続いて, "多様体" の概念とその射について定義する. これにより, 多様体とその射のなす圏が得られる.

定義 4.3.3. k 上の多様体とは, 以前に定義したアフィン, 準アフィン, 射影または準射影多様体のうち任意のもののことをいう. 2 つの多様体 X, Y について, それらの間の射 $\varphi : X \to Y$ とは, 連続写像であり, かつすべての開集合 $U \subseteq Y$ およびすべての正則関数 $f : U \to k$ について関数 $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \to k$ が $\varphi^{-1}(U)$ 上正則となるようなもののことをいう.

注意 4.3.4. 多様体上の正則関数はその多様体からアフィン多様体 $\mathbb{A}^1$ への射である.

ここで, 射影変換についても述べておく.

定義 4.3.5. k 上の $n+1$ 次正則行列全体のなす群を $\mathrm{GL}(n+1, k)$ とかく. $\mathrm{GL}(n+1, k)$ を "定数倍は同一視する" という同値関係で割ったものを $\mathrm{PGL}(n, k)$ で表す. $\mathrm{PGL}(n, k)$ の元 $[A]$ は同型射 $\mathbb{P}^n \ni (X_0 : \cdots : X_n) \mapsto (X_0 : \cdots : X_n){}^tA \in \mathbb{P}^n$ を定める. $\mathrm{PGL}(n, k)$ の元を $\mathbb{P}^n$ の射影変換という.

次に, 多様体上の関数がなす環を定義する. 定義にあたって次の命題に注意しておく.

命題 4.3.6. Y を多様体とし, f, g を Y 上の正則関数とする. Y の空ではない開集合 U があり U 上で $f = g$ であるとき, Y 上で $f = g$ である.

定義 4.3.7. Y を多様体とする．Y 上の正則関数全体がなす環を $\mathscr{O}(Y)$ で表す．また, $P \in Y$ に対して, Y 上 P における局所環 $\mathscr{O}_P$ を

$$\mathscr{O}_P := \{\langle U, f\rangle \mid U \text{ は } P \text{ を含む } Y \text{ の開集合}, f \text{ は } U \text{ 上の正則関数 }\}$$

と定める．ただし, 2 つの対 $\langle U, f\rangle$, $\langle V, g\rangle$ は $U \cap V$ 上で $f = g$ となるとき同一視するものとする．さらに, Y の関数体 $k(Y)$ を

$$k(Y) := \{\langle U, f\rangle \mid U \text{ は } Y \text{ の空ではない開集合}, f \text{ は } U \text{ 上の正則関数 }\}$$

と定める．ただし, 2 つの対 $\langle U, f\rangle$, $\langle V, g\rangle$ は $U \cap V$ 上で $f = g$ となるとき同一視するものとする．$k(Y)$ の元は Y 上の有理関数とよばれる．

注意 4.3.8. $\mathscr{O}_P$ は実際に局所環である．そのただ 1 つの極大イデアルは, P において消えるような正則関数をもつ対全体の集合である．また, 関数体は実際に体である．さらに, 自然な k-代数の単射準同型の列 $\mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}_P \to k(Y)$ がある．したがって, $\mathscr{O}(Y)$, $\mathscr{O}_P$ は $k(Y)$ の部分環として考える．

次に, アフィン多様体の場合において, 上に定義した関数のなす環がどのようなものなのかをみる．

定理 4.3.9. $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ をアフィン多様体とする．このとき, 次が成立する．

(1) 自然な k-代数の同型 $\mathscr{O}(Y) \simeq k[Y]$ がある．この対応は, $k[Y]$ における同値類 $f + I(Y)$ ($f \in k[x_1, \ldots, x_n]$) に $P \mapsto f(P)$ で定まるような関数を対応させる．

(2) 各点 $P \in Y$ に対して $\mathfrak{m}_P \subseteq k[Y]$ を $\mathfrak{m}_P := \{f \in k[Y] \mid f(P) = 0\}$ と定める．このとき, 対応 $P \mapsto \mathfrak{m}_P$ により Y の点全体のなす集合と $k[Y]$ の極大イデアル全体のなす集合は 1 対 1 に対応する．

(3) 各点 $P \in Y$ に対して自然な k-代数の同型 $\mathscr{O}_P \simeq k[Y]_{\mathfrak{m}_P}$ がある．ただし, $k[Y]$ の $\mathfrak{m}_P$ における局所化を $k[Y]_{\mathfrak{m}_P}$ で表すものとする．

(4) 自然な k-代数の同型 $k(Y) \simeq Q(k[Y])$ がある．

次に, 射影多様体がアフィン多様体による開被覆をもつことをみる．整数 $0 \leq i \leq n$ に対して, $\mathbb{P}^n$ の開集合 U_i を $U_i := \mathbb{P}^n \setminus V(X_i)$ と定める．$\mathbb{P}^n$ の点 $P = (a_0 : \cdots : a_n)$ について少なくとも 1 つの a_i は 0 ではないから, $\mathbb{P}^n$ は U_i たちで覆われる．写像 φ_i を

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{A}^n;\ (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right)$$

で定める．これは斉次座標のとりかたによらず定まる．

命題 4.3.10. 写像 φ_i は準射影多様体 U_i からアフィン多様体 $\mathbb{A}^n$ への同型である．

系 4.3.11. 射影多様体 $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ は開集合 $Y \cap U_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ によって覆われる．また, 準射影多様体 $Y \cap U_i \neq \emptyset$ は $\mathbb{A}^n$ 内のあるアフィン多様体と同型である．とくに, Y が 1 つの既約斉次多項式 $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ の零点集合として定まる射影多様体のとき, $Y \cap U_i \neq \emptyset$ は $\mathbb{A}^n$ において多項式 $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ の零点集合として定まるアフィン多様体と同型である．ここで, 多項式 f_i は斉次多項式 F について変数 X_i に 1 を代入し, それ以外の変数を順に $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に置き換えた多項式である．

最後に, 射影多様体上の関数がなす環を観察し, 射影多様体の次元を定義する．多様体 Y の開集合 U がアフィン多様体と同型であるとき, U を Y のアフィン開集合という．次の定理では, アフィン開集合と対応するアフィン多様体を同一視することにする．

定理 4.3.12. $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ を射影多様体とする．このとき, 次が成立する．

(1) 射影多様体上の正則関数は定数関数である．とくに, $\mathscr{O}(Y) = k$.

(2) $P \in Y$ とし, $P \in U$ なるアフィン開集合 U を考える．このとき, 自然な k-代数の同型 $\mathscr{O}_P \simeq k[U]_{\mathfrak{m}_P}$ がある．ここで, $\mathfrak{m}_P$ はアフィン多様体 U の点 P に対応する座標環 $k[U]$ の極大イデアルである．

(3) Y のアフィン開集合 U に対し, 自然な k-代数の同型 $k(Y) \simeq k(U)$ がある．

定義 4.3.13. 射影多様体 $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ について, Y のアフィン開集合 U をとり, Y の次元 $\dim Y$ をアフィン多様体 U の次元として定義する : $\dim Y = \mathrm{tr.deg}_k k(U)$. 射影多様体の次元はアフィン開集合のとり方によらず一定である．

射影多様体からの射に関する命題と次元に関する命題を述べておく．

命題 4.3.14. 射影多様体 X から多様体 Y への射 $\varphi : X \to Y$ について, その像 $\varphi(X)$ は Y における既約閉集合である．

命題 4.3.15. Y を多様体とし, Z を Y の真の既約閉集合とする．このとき, Z も多様体であり, $\dim Z < \dim Y$ となる．

命題 4.3.16. $\mathbb{A}^n$ に含まれるアフィン多様体 Y について, $\dim Y = n - 1$ であるための必要十分条件は Y がある 1 つの既約多項式の零点集合と一致することである．同様に, Y が $\mathbb{P}^n$ に含まれる射影多様体のとき, $\dim Y = n - 1$ であるための必要十分条件は Y がある 1 つの既約斉次多項式の零点集合と一致することである．

4.4 有理写像

ここでは, 多様体上の有理写像を定義する. これにより, 多様体と有理写像のなす圏が定義できる. 定義にあたって次の命題に注意しておく.

命題 4.4.1. X, Y を多様体とし, φ と ψ はいずれも X から Y への射とする. X の空ではない開集合 U があり φ と ψ が U 上で等しいとき, X 上で $\varphi = \psi$ である.

定義 4.4.2. X, Y を多様体とする. X と Y の間の有理写像 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ とは次のような同値類のことである. すなわち, φ の元は空ではない X の開集合 U と U 上の射 $\varphi_U : U \to Y$ の対 $\langle U, \varphi_U \rangle$ であり, 2 つの対 $\langle U, \varphi_U \rangle$, $\langle V, \varphi_V \rangle$ は $U \cap V$ 上で φ_U と φ_V が一致するとき同値である. φ のすべての対 $\langle U, \varphi_U \rangle$ について φ_U の像が Y において稠密であるとき, 有理写像 φ は支配的であるという.

多様体の間の有理写像 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ について, 代表元 $\langle U, \varphi_U \rangle$ がとれるとき, “有理写像 φ は射 φ_U で代表される” という. また, 有理写像 φ は X の適当な開集合からの射を定める. 実際, $\mathrm{Dom}(\varphi)$ を有理写像 φ に含まれるすべての対の開集合の和で定義する. $P \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ について, $P \in U$ なる対 $\langle U, \varphi_U \rangle$ をとり, $\varphi(P) := \varphi_U(P)$ と定めることで, 射 $\varphi : \mathrm{Dom}(\varphi) \to Y$ が定まる.

定義 4.4.3. 多様体と有理写像のなす圏における同型射は双有理写像とよばれる. 2 つの多様体の間に双有理写像があるとき, それらの多様体は互いに双有理であるという.

続いて, 支配的有理写像が関数体の拡大をひきおこすことをみる. $\varphi : X \dashrightarrow Y$ を多様体の間の支配的有理写像とし, その代表元を $\langle U, \varphi_U \rangle$ とする. また, 有理関数 $f \in k(Y)$ は対 $\langle V, f \rangle$ で代表されるとする. いま φ は支配的であるから, $\varphi_U(U)$ は Y において稠密である. したがって, $\varphi_U^{-1}(V)$ は X の空ではない開集合であり, $f \circ \varphi_U$ は $\varphi_U^{-1}(V)$ 上の正則関数である. これは X 上の有理関数を与え, これにより k-代数の準同型 $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$ が定まる. さらに, 次が成り立つ.

定理 4.4.4. 多様体と支配的有理写像がなす圏と k 上の有限生成拡大体の圏の, 矢印を逆にする同値がある. この同値において, 有理写像に対応する k-代数の準同型は上述のように与えられる. とくに, 支配的有理写像 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ が双有理写像であるための必要十分条件はひきおこされる k-代数の準同型 $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$ が k-同型であることである.

4.5 非特異多様体

定義 4.5.1. Y を多様体とする．Y が点 $P \in Y$ において非特異であることを次のように定義する．すなわち, 点 P での局所環 $\mathscr{O}_P$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ として, $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim Y$ が成り立つとき, Y は P において非特異であるという．また, そのような点 P を Y の非特異点という．多様体はそのすべての点が非特異点であるとき, 非特異多様体であるという．

多様体 Y の点 P が非特異点ではないとき, P を Y の特異点という．Y の特異点全体からなる集合を $\mathrm{Sing}(Y)$ とかく．一方, $Y_{\mathrm{sm}} := Y \setminus \mathrm{Sing}(Y)$ と定める．次の定理は $\mathrm{Sing}(Y)$ が Y_{sm} に比べて非常に小さい集合であることを述べている．

定理 4.5.2. Y を多様体とするとき, $\mathrm{Sing}(Y)$ は Y の真の閉部分集合である．

4.6 射影代数曲線と Riemann–Roch の定理

次元 1 の射影多様体を射影代数曲線という．以下, 基本的な射影代数曲線の性質について述べる．以下, $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ は射影代数曲線とする．はじめに, 離散付値環について述べる．

命題 4.6.1. 体ではない整域 A について, 次の条件は互いに同値である．

(1) A は Noether 局所環で, その極大イデアルは単項イデアルである．
(2) 次の性質をもつ既約元 $t \in A$ が存在する．すなわち, 任意の $z \in A \setminus \{0\}$ に対して, $z = ut^m$ をみたす $u \in A^\times$, $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ がそれぞれただ 1 つ存在する．
(3) A は局所環かつ単項イデアル整域である．

また, 上記条件のいずれかが成り立つとき, (2) の既約元 t は次の性質をもつ．すなわち, 任意の $w \in Q(A) \setminus \{0\}$ に対して, $w = ut^m$ をみたす $u \in A^\times$, $m \in \mathbb{Z}$ がそれぞれただ 1 つ存在する．

定義 4.6.2. 体ではない整域 A が命題 4.6.1 の条件のいずれかをみたすとき, A を離散付値環という．A が離散付値環であるとき, 条件 (2) の既約元 t を局所パラメータという．$w \in Q(A) \setminus \{0\}$ に対して, $w = ut^m$ $(u \in A^\times, m \in \mathbb{Z})$ なる u, m をとり, $\mathrm{ord}(w) := m$ と定める．また, $\mathrm{ord}(0) := \infty$ と定める．写像 $\mathrm{ord} : Q(A) \ni w \mapsto \mathrm{ord}(w) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を商体 $Q(A)$ の離散付値という．$\mathrm{ord}(w)$ を w の位数という．

離散付値は次の性質をもつ.

命題 4.6.3. A を離散付値環とし, $\mathrm{ord} : Q(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を $Q(A)$ の離散付値とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $w \in Q(A)$ に対して, $\mathrm{ord}(w) = \infty \iff w = 0$.

(2) $w_1, w_2 \in Q(A)$ に対して, $\mathrm{ord}(w_1 w_2) = \mathrm{ord}(w_1) + \mathrm{ord}(w_2)$ が成り立つ.

(3) $w_1, w_2 \in Q(A)$ に対して, $\mathrm{ord}(w_1 + w_2) \geq \min(\mathrm{ord}(w_1), \mathrm{ord}(w_2))$ が成り立つ.
さらに, $\mathrm{ord}(w_1) < \mathrm{ord}(w_2)$ であるとき, $\mathrm{ord}(w_1 + w_2) = \mathrm{ord}(w_1)$ となる.

(4) $A = \{w \in Q(A) \mid \mathrm{ord}(w) \geq 0\}$ である.

(5) $t \in Q(A)$ に対して, t が局所パラメータである $\iff \mathrm{ord}(t) = 1$.

次に, 射影代数曲線の非特異点における局所環が離散付値環であることを述べる.

命題 4.6.4. $P \in Y_{\mathrm{sm}}$ における局所環 $\mathscr{O}_P$ は離散付値環である. また, 局所パラメータ t_P は $\mathscr{O}_P$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の生成元である.

続いて, 離散付値に関する命題を 1 つ述べる. さらに, 射影代数曲線上の有理関数の零点と極を定義し, 離散付値との関係を考察する. 点 $P \in Y_{\mathrm{sm}}$ について, $Q(\mathscr{O}_P)(\simeq k(Y))$ の離散付値を ord_P で表す.

命題 4.6.5. $P \in Y_{\mathrm{sm}}$, $f \in \mathscr{O}_P \setminus \{0\}$ のとき, $\mathrm{ord}_P(f) = \dim_k \mathscr{O}_P / \langle f \rangle$ が成り立つ.

定義 4.6.6. 対 $\langle U, f_U \rangle$ で代表される射影代数曲線 Y 上の有理関数 f について, その同値類に含まれる対の開集合すべての和集合を有理関数 f の定義域という. これを $\mathrm{Dom}(f)$ で表す. $P \in \mathrm{Dom}(f)$ について, $P \in V$ なる対 $\langle V, f_V \rangle$ をとり $f(P) := f_V(P)$ と定めることで, 有理関数 f は正則関数 $f : \mathrm{Dom}(f) \to k$ を定める. $P \in \mathrm{Dom}(f)$ で $f(P) = 0$ のとき, P を f の零点という. 集合 $Y \setminus \mathrm{Dom}(f)$ の点を f の極という.

命題 4.6.7. $P \in Y_{\mathrm{sm}}$ とし, $f \in k(Y)$ とするとき, P が f の零点であることと $\mathrm{ord}_P(f) > 0$ が同値であり, P が f の極であることと $\mathrm{ord}_P(f) < 0$ が同値である.

以下, Y は非特異とする. まず, 非特異射影代数曲線から射影空間への有理射はその曲線全体で定義されることを述べ, Y の自己双有理写像と自己同型の対応をみる. 以下, Y の自己同型全体がなす群を $\mathrm{Aut}(Y)$ で表し, $\mathrm{Bir}(Y)$ で Y の自己双有理写像全体がなす群を表す.

命題 4.6.8. 有理写像 $\varphi : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ を考える. このとき, φ が定める射 $\varphi : \mathrm{Dom}(\varphi) \to \mathbb{P}^n$

について, $\mathrm{Dom}(\varphi) = Y$ である.

命題 4.6.9. 群の同型 $\mathrm{Bir}(Y) \to \mathrm{Aut}(Y)$ がある. この対応は, 有理写像に対してその有理写像が定める射を対応させるようなものである.

また, Y の位相についてもここで述べておく.

命題 4.6.10. Y の真の閉集合は有限集合である.

次に, 非特異射影代数曲線上の因子を定義し, 因子に付随する k-線形空間 $L(D)$ を定義する.

定義 4.6.11. Y 上の因子 D とは, 形式和

$$D = \sum_{P \in Y} m_P P \ (m_P \in \mathbb{Z}, \text{almost all } m_P = 0)$$

のことである. "almost all $m_P = 0$" は有限個の m_P を除いて $m_P = 0$, という意味である. また, m_P を $\mathrm{ord}_P(D)$ ともかく. さらに, Y 上の因子全体の集合を $\mathrm{Div}(Y)$ で表すことにする. $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(Y)$ に対して,

$$D_1 + D_2 := \sum_{P \in Y} (\mathrm{ord}_P(D_1) + \mathrm{ord}_P(D_2))P$$

と定める. これにより $\mathrm{Div}(Y)$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群となる. 有理関数 $f \in k(Y) \setminus \{0\}$ に対して,

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{P \in Y} \mathrm{ord}_P(f)P$$

と定め f が定義する主因子という. これは $\mathrm{div}_Y(f)$ ともかく.

注意 4.6.12. 有理関数 f の零点と極は有限個しかない. よって, $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}(Y)$ である.

定義 4.6.13. $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(Y)$ に対して,

$$D_1 \leq D_2 \iff \text{任意の } P \in Y \text{ に対して, } \mathrm{ord}_P(D_1) \leq \mathrm{ord}_P(D_2)$$

で順序 $\leq$ を定める. $D \in \mathrm{Div}(Y)$ に対して, $0 \leq D$ であるとき, D を正因子または有効因子という. さらに, D の次数 $\deg(D)$ を

$$\deg(D) := \sum_{P \in Y} \mathrm{ord}_P(D)$$

と定める. 写像 $\deg : \mathrm{Div}(Y) \to \mathbb{Z};\ D \mapsto \deg(D)$ は $\mathbb{Z}$-準同型である.

定義 4.6.14. $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(Y)$ に対して, 関係 $\sim$ を

$$D_1 \sim D_2 \iff f \in k(Y)^\times \text{が存在して } D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f)$$

と定める. これは同値関係である. $D_1 \sim D_2$ のとき, D_1, D_2 は線形同値であるという.

注意 4.6.15. 因子の次数は線形同値により不変である.

定義 4.6.16. $D \in \mathrm{Div}(Y)$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} L(D) &:= \{f \in k(Y) \mid \text{各 } P \in Y \text{ に対して, } \mathrm{ord}_P(f) \geq -\mathrm{ord}_P(D)\} \\ &= \{f \in k(Y)^\times \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

と定める. $L(D)$ は $k(X)$ の有限次元部分 k-線形空間である.

注意 4.6.17. $L(D)$ の次元は因子の線形同値によって不変である.

さらに, 零点や極の定める因子と拡大次数との関係を述べる.

定義 4.6.18. $f \in k(Y)^\times$ とする. このとき,

$$(f)_0 := \sum_{\mathrm{ord}_P(f) > 0} \mathrm{ord}_P(f) P \ , \ (f)_\infty := \sum_{\mathrm{ord}_P(f) < 0} (-\mathrm{ord}_P(f)) P$$

と定める. 定義よりこれらは有効因子で, $\mathrm{div}(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ である.

命題 4.6.19. $f \in k(Y) \setminus k$ のとき, $[k(Y) : k(f)] = \deg((f)_0) = \deg((f)_\infty)$ となる.

続いて, 微分加群の概念を導入し, 標準因子の概念を定義する.

定義 4.6.20. R を k-代数とし, M を R-加群とする. k-線型写像 $D : R \to M$ が k-導分であるとは, 各 $a, b \in R$ に対して, $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ が成立することである.

定理 4.6.21. R を k-代数とする. このとき, R-加群 $\Omega_{R/k}$ と k-導分 $d : R \to \Omega_{R/k}$ の組で, 次の性質をもつものが R-加群の同型を除いてただ 1 つ存在する. すなわち, 任意の R-加群 M と任意の k-導分 $D : R \to M$ に対して, R-加群の準同型 $f : \Omega_{R/k} \to M$ で, $f \circ d = D$ なるものがただ 1 つ存在する.

定義 4.6.22. R を k-代数とする. 定理 4.6.21 において R-加群の同型を除いて一意的に定まる $\Omega_{R/k}$ を R の微分加群といい, k-導分 d を R の k-微分という.

命題 4.6.23. R を k-代数とする. 微分加群 $\Omega_{R/k}$ において, $\{d(a) \mid a \in R\}$ は $\Omega_{R/k}$ の R-加群としての生成系をなす.

微分加群の概念を非特異射影代数曲線の関数体に適用する.

定理 4.6.24. 関数体 $k(Y)$ に付随する微分加群 $\Omega_{k(Y)/k}$ は 1 次元 $k(Y)$-線型空間である. また, $P \in Y$ に対して, その点における局所パラメータを t_P とすれば, $d(t_P)$ は $\Omega_{k(Y)/k}$ の $k(Y)$-線型空間としての基底をなす. ここで, $d : k(Y) \to \Omega_{k(Y)/k}$ は付随する k-微分である.

定義 4.6.25. $\Omega_{k(Y)/k}$ の元を Y 上の有理微分という.

Y 上の 0 ではない有理微分 ω を考える. ω を, $P \in Y$ での局所パラメータ t_P を用いて $\omega = fd(t_P)$ $(f \in k(Y)^{\times})$ と表すとき, $\mathrm{ord}_P(f)$ を ω の点 P での位数といい $\mathrm{ord}_P(\omega)$ とかく. さらに, $\mathrm{ord}_P(\omega) \geq 0$ のとき, ω は P において正則であるという. ω が Y のすべての点で正則であるとき, ω は Y 上の正則微分であるという.

定義 4.6.26. ω を Y 上の 0 ではない有理微分とする. このとき, ω の因子 $\mathrm{div}(\omega)$ を

$$\mathrm{div}(\omega) := \sum_{P \in Y} \mathrm{ord}_P(\omega) P$$

と定める. $\mathrm{ord}_P(\omega) \neq 0$ なる P は有限個であり, $\mathrm{div}(\omega) \in \mathrm{Div}(Y)$ である. また,

$$\Omega(Y) := \{\omega \in \Omega_{k(Y)/k} \mid \omega \text{ は } Y \text{ 上の正則微分 } \}$$

と定める. これは, $\Omega_{k(Y)/k}$ の k-部分空間である.

有理微分の定める因子は線形同値を除いて一意的である.

命題 4.6.27. Y 上の 2 つの 0 ではない有理微分 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{k(Y)/k}$ を考える. このとき, $\mathrm{div}(\omega_1)$ と $\mathrm{div}(\omega_2)$ は線形同値である.

定義 4.6.28. Y 上の 0 ではない有理微分 ω が, 線形同値を除いて一意的に定める因子 $\mathrm{div}(\omega)$ を Y の標準因子といい K_Y とかく. さらに, Y の種数 $g = g(Y)$ を k-線型空間の次元 $\dim_k(\Omega(Y))$ として定義する.

これで, Riemann–Roch の定理を述べる準備が整った.

定理 4.6.29 (Riemann–Roch)**.** $D \in \mathrm{Div}(Y)$ とするとき, 次が成り立つ.

$$\dim_k L(D) - \dim_k L(K_Y - D) = \deg(D) + 1 - g(Y).$$

最後に Weierstrass 点について述べておく.

命題 4.6.30. $P \in Y$ とする．このとき, 任意の整数 $m \geq 2g(Y)$ に対して, $(f)_\infty = mP$ なる $f \in k(Y)$ が存在する．

定義 4.6.31. $P \in Y$ とする．整数 $m \geq 0$ は, $(f)_\infty = mP$ をみたす $f \in k(Y)$ が存在するとき, P における non-gap であるという．そうではないとき, m は P における gap であるという．命題 4.6.30 より, 各点 $P \in Y$ において, 任意の整数 $m \geq 2g(Y)$ は non-gap である．

命題 4.6.32. $P \in Y$, $m \geq 0$ を整数とする．このとき, 次が成り立つ．

(1) m が P における non-gap $\iff \dim_k(L(mP)) > \dim_k(L((m-1)P))$ が成立．

(2) P における non-gap 全体の集合 $H(P)$ は, 0 以上の整数全体がなす加法半群の部分半群をなす．

定義 4.6.33. 命題 4.6.32 (2) における $H(P)$ を P における Weierstrass 半群という．

定理 4.6.34 (Weierstrass gap theorem)**.** $g := g(Y) \geq 1$ とすると, ちょうど g 個の $P \in Y$ における gap $i_1 < i_2 < \cdots < i_g$ が存在する．ただし, $i_1 = 1$ かつ $i_g \leq 2g-1$ である．

定義 4.6.35. 定理 4.6.34 における $\{i_1, i_2, \ldots, i_g\}$ を P における gap sequence という．標数 0 の場合において, P における gap sequence が $\{i_1, i_2, \ldots, i_g\} \neq \{1, 2, \ldots, g\}$ であるとき, P は Y の Weierstrass 点であるという．

補題 4.6.36. Y を非特異射影代数曲線, $P \in Y$, $D \in \mathrm{Div}(Y)$ とするとき, 次が成り立つ．

(1) $\dim_k(L(D)) - 1 \leq \dim_k(L(D-P)) \leq \dim_k(L(D))$ が成り立つ．

(2) $0 \leq r \in \mathbb{Z}$ について,

$$r \in H(P) \iff \dim_k(L(K_Y - rP)) = \dim_k(L(K_Y - (r-1)P)).$$

ここで, $H(P)$ は P における Weierstrass 半群である．

補題 4.6.36 と同じ状況のとき, $1 \leq m \in \mathbb{Z}$ について次が成立することに注意する．

$$r \notin H(P) \iff \dim_k L(K_Y - (r-1)P) = \dim_k L(K_Y - rP) + 1.$$

補題 4.6.37. Y を非特異射影代数曲線, $P \in Y$ とする．また, $1 \leq r \in \mathbb{Z}$ とし, 0 ではない有理微分 $\omega \in \Omega_{k(Y)/k}$ が定める因子 $\mathrm{div}(\omega)$ を考える．このとき, 次が成り立つ．

$$r \notin H(P) \iff \mathrm{ord}_P(f\omega) = r - 1 \text{ をみたす有理関数 } f \in L(\mathrm{div}(\omega)) \text{ が存在する．}$$

命題 4.6.38. Y を非特異射影代数曲線, $\sigma \in \mathrm{Aut}(Y)$ とする．$P_1, P_2 \in Y$, $\sigma(P_1) = P_2$ であるとき, P_1, P_2 の Weierstrass 半群は互いに等しい.

4.7 Riemann–Hurwitz の分岐公式・ガロア被覆の基本性質

はじめに, 非特異射影代数曲線間の有限射について述べ, 因子の引き戻しを定義する．また, 分岐の概念を定義し, Riemann–Hurwitz の分岐公式について述べる．さらに, ガロア被覆の基本的な性質についても述べる．以下, X, Y を非特異射影代数曲線とする.

定義 4.7.1. $\varphi : X \to Y$ を射とする．φ が全射であるとき, φ は有限射であるという．このとき, φ が代表する有理写像は支配的であり, 関数体の拡大 $k(X)/\varphi^*(k(Y))$ をひきおこす．有限射 φ について, 拡大 $k(X)/\varphi^*(k(Y))$ が分離拡大であるとき, φ は分離有限射であるという．また, 有限射 φ について $\deg(\varphi) := [k(X) : \varphi^*(k(Y))]$ $(< \infty)$ と定める．さらに, 点 $Q \in Y$ に対して, 有限射 φ の Q における fiber を逆像 $\varphi^{-1}(Q)$ と定める.

次に, 非特異射影代数曲線の間の射は 1 点写像でなければ有限射であることを述べ, 有限射による因子の引き戻しを定義する.

命題 4.7.2. $\varphi : X \to Y$ を射とする．このとき, φ は 1 点写像でなければ有限射である.

定義 4.7.3. $\varphi : X \to Y$ を有限射とする.

(1) $Q \in Y$ とする．このとき, X 上の因子 $\varphi^*(Q)$ を

$$\varphi^*(Q) := \sum_{P \in \varphi^{-1}(Q)} \mathrm{ord}_P(\varphi^*(t_Q))P$$

と定める．ここで, t_Q は Q における局所パラメータである．また, Q 上 P の分岐指数 (ramification index) $e(P|Q)$ を

$$e(P|Q) := \mathrm{ord}_P(\varphi^*(t_Q))$$

と定める．$e(P|Q) > 1$ のとき, φ は P で分岐するといい, P を φ の ramification point, Q を φ の branch point という．さらに,

$$\mathrm{Ram}(\varphi) := \{P \in X \mid e(P|\varphi(P)) > 1\}$$

と定めて φ の ramification locus といい,

$$\mathrm{Branch}(\varphi) := \{Q \in Y \mid Q \text{ は } \varphi \text{ の branch point}\}$$

と定めて φ の branch locus という.

(2) $P \in X$ について, $e(P|\varphi(P)) = \deg(\varphi)$ であり $|\varphi^{-1}(\varphi(P))| = 1$ のとき, φ は P において完全分岐するという.

(3) $D = \sum_{Q \in Y} \mathrm{ord}_Q(D)Q \in \mathrm{Div}(Y)$ とする. このとき,

$$\varphi^*(D) := \sum_{Q \in Y} \mathrm{ord}_Q(D)\varphi^*(Q)$$

によって D の φ による引き戻し $\varphi^*(D)$ を定める.

因子の引き戻しについて次の性質がある.

命題 4.7.4. $\varphi : X \to Y$ を有限射とするとき, 次が成り立つ.

(1) $f \in k(Y)^\times$ に対して, $(\varphi^*(f))_0 = \varphi^*((f)_0)$, $(\varphi^*(f))_\infty = \varphi^*((f)_\infty)$ となる. とくに, $\varphi^*(\mathrm{div}_Y(f)) = \mathrm{div}_X(\varphi^*(f))$ である.

(2) $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(Y)$ で D_1, D_2 が線形同値なら, $\varphi^*(D_1)$, $\varphi^*(D_2)$ は線形同値である.

(3) $D \in \mathrm{Div}(Y)$ について, $\deg(\varphi^*(D)) = \deg(\varphi)\deg(D)$ である.

続いて, 分離有限射の性質について述べる.

命題 4.7.5. $\varphi : X \to Y$ を分離有限射とすると, $\mathrm{Ram}(\varphi)$, $\mathrm{Branch}(\varphi)$ は有限集合である.

命題 4.7.6. $\varphi : X \to Y$ を分離有限射とするとき, k-代数の準同型 $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$ は微分加群の間の単射 $k(Y)$-準同型

$$\varphi^* : \Omega_{k(Y)/k} \to \Omega_{k(X)/k} \quad \left(\sum_i f_i d(g_i) \mapsto \sum_i \varphi^*(f_i) d(\varphi^*(g_i)) \right)$$

をひきおこす. さらに, 0 ではない Y 上の有理微分 ω に対して

$$R(X/Y) := \mathrm{div}(\varphi^*(\omega)) - \varphi^*(\mathrm{div}(\omega))$$

とおくと, $R(X/Y)$ は ω のとりかたによらず定まる X の有効因子である.

定義 4.7.7. 命題 4.7.6 の $R(X/Y)$ を ramification divisor という. また, $P \in X$ について $Q := \varphi(P)$ とし,

$$d(P|Q) := \mathrm{ord}_P(R(X/Y)) \; (= \mathrm{ord}_P(\varphi^*(\omega)) - e(P|Q)\mathrm{ord}_Q(\omega))$$

と定めて, $d(P|Q)$ を different exponent という. $d(P|Q) = 0 \iff e(P|Q) = 1$ である.

次に述べる定理が Riemann–Hurwitz の分岐公式である.

定理 4.7.8 (Riemann–Hurwitz)**.** $\varphi : X \to Y$ を分離有限射とする. さらに, $g(X), g(Y)$ をそれぞれ X, Y の種数とする. このとき,

$$2g(X) - 2 = \deg(\varphi)(2g(Y) - 2) + \deg(R(X/Y))$$

が成り立つ. さらに, 各 $P \in X$ に対して, $\gcd(e(P|\varphi(P)), \mathrm{ch}(k)) = 1$ のとき, 次が成立.

$$\deg(R(X/Y)) = \sum_{P \in X} e(P|\varphi(P)) - 1.$$

分岐の計算に役立つ事実を述べる.

命題 4.7.9 ([21], Remark 4.3.7)**.** $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ は $\varphi = (f : 1)$ $(f \in k(X))$ で代表される分離有限射とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\mathrm{div}(d(f)) = -2(f)_\infty + R(X/\mathbb{P}^1).$$

ただし, $d : k(X) \to \Omega_{k(X)/k}$ は付随する k-微分である.

最後に, ガロア被覆に関して述べる. 非特異射影代数曲線 Y について, 対応 $\mathrm{Aut}(Y) \ni \varphi \mapsto \varphi^* \in \mathrm{Aut}_k(k(Y))$ は群の同型を与えるので, これらを同一視して扱うことがある.

定義 4.7.10. $\varphi : X \to Y$ を有限射とする. 関数体の拡大 $k(X)/\varphi^*(k(Y))$ がガロア拡大であるとき, φ はガロア被覆であるという.

定理 4.7.11 ([21], Theorem 3.7.1, Corollary 3.7.2, Theorem 3.8.2)**.** $\varphi : X \to Y$ をガロア被覆, 付随するガロア群を $G = \mathrm{Gal}(k(X)/\varphi^*(k(Y))$ とし, $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ とみなす. このとき, 次が成り立つ.

(1) 各 $Q \in Y$ について, G は $\varphi^{-1}(Q)$ に推移的に作用する. すなわち, $P \in \varphi^{-1}(Q)$ とすると, $\varphi^{-1}(Q) = \{\sigma(P) \mid \sigma \in G\}$ である.

(2) $Q \in Y$ とするとき, 各 $P \in \varphi^{-1}(Q)$ について $e(P|Q) = \deg(\varphi)/|\varphi^{-1}(Q)|$ である. とくに, $P \in \varphi^{-1}(Q)$, $G(P) := \{\sigma \in G \mid \sigma(P) = P\}$ とすると, $e(P|Q) = |G(P)|$ である.

(3) $Q \in Y$, $P \in \varphi^{-1}(Q)$ とするとき, 因子の等式 $\varphi^*(Q) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(P)$ が成り立つ.

4.8 非特異モデルと点からの射影

定理 4.8.1. k の拡大体 L について, L は k 上有限生成であり, $\mathrm{tr.deg}_k L = 1$ とする．このとき, L と k-代数として同型な関数体をもつような非特異射影代数曲線が同型を除いてただ 1 つ存在する．これを L/k の非特異モデルという．

定理 4.8.2. 射影平面代数曲線 $C \subseteq \mathbb{P}^2$ に対して, 非特異射影代数曲線 $\hat{C}$ と $\hat{C}$ から C への双有理写像 r で, 次の性質をみたすものが存在する．すなわち, $\tilde{C}$ が非特異射影代数曲線で $\tilde{r}$ が $\tilde{C}$ から C への双有理写像であるとき, 多様体の同型 $f : \hat{C} \to \tilde{C}$ であって $\tilde{r} \circ f = r$ となるものがただ 1 つ存在する．

定義 4.8.3. 定理 4.8.2 における r を C の正規化射という． r は多様体の同型 $\hat{C} \setminus r^{-1}(\mathrm{Sing}(C)) \simeq C_{\mathrm{sm}}$ をひきおこすから, r により $C_{\mathrm{sm}} \subseteq \hat{C}$ と考えることがある．

商代数曲線についても述べておく．

定義 4.8.4. $G \subseteq \mathrm{Aut}_k(k(Y))$ を有限部分群とする．このとき, $k(Y)^G/k$ の非特異モデルを Y/G で表し, G による Y の商曲線という．ここで, $k(Y)^G$ は G による $k(Y)$ の固定体を表す．

射影の分岐と局所交点数の関係を述べる．$C \subset \mathbb{P}^2$ を射影平面代数曲線とし, 点 $P \in \mathbb{P}^2$ を考える．$d := \deg(C) \geq 2$ のとき, 射影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ の分岐指数とは, C の正規化射 $r : \hat{C} \to C$ と π_P を合成した射 $\hat{\pi}_P$ の分岐指数のことをいう．

命題 4.8.5. 上の状況で, 射影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ について次が成り立つ．

(1) $Q \in C_{\mathrm{sm}}$ で $Q \neq P$ であるとき, $e(Q|\hat{\pi}_P(Q)) = I_Q(C, \overline{PQ})$．ここで, $\overline{PQ}$ は P と Q を結ぶ直線を表す．

(2) $P \in C_{\mathrm{sm}}$ であるとき, $e(P|\hat{\pi}_P(P)) = I_P(C, T_P C) - 1$.

4.9 線形系

線形系について述べる．内容は, 今野 [16] を参考にした．ここでは, Y を非特異射影代数曲線, $D \in \mathrm{Div}(Y)$ とする．

定義 4.9.1. D に付随する完備線形系 $|D|$ を

$$|D| := \{E \in \mathrm{Div}(Y) \mid E \sim D, E \geq 0\}$$

で定める．また, $L(D) \setminus \{0\}$ を "定数倍は同一視する" という同値関係で割った商集合を $\mathbb{P}(L(D))$ で表すことにする．

$|D|$ と $\mathbb{P}(L(D))$ には対応がある．

命題 4.9.2. 自然な全単射 $v : \mathbb{P}(L(D)) \to |D|;\ [f] \mapsto \mathrm{div}(f) + D$ がある．

定義 4.9.3. $\{0\} \neq L \subseteq L(D)$ を k-部分空間とする．このとき, L に対応する $|D|$ の部分線形系 $\Lambda = (D, L)$ とは,

$$\Lambda := \{\mathrm{div}(f) + D \mid f \in L \setminus \{0\}\} = v(\mathbb{P}(L))$$

のことである．ただし, $\mathbb{P}(L) \subseteq \mathbb{P}(L(D))$ と考えている．また, 部分線形系 $\Lambda = (D, L)$ の次数, 次元をそれぞれ $\deg(\Lambda) := \deg(D)$, $\dim(\Lambda) := \dim_k(L) - 1$ と定める．

次に, 線形系に関連する諸概念を定義する．因子 $E \in \mathrm{Div}(Y)$ に対して, $\mathrm{supp}(E) := \{P \in Y \mid \mathrm{ord}_P(E) \neq 0\}$ と定めて E の support という．

定義 4.9.4. $\Lambda = (D, L)$ を線形系とする．

(1) $P \in Y$ が Λ の base point であるとは, 各 $E \in \Lambda$ に対して, $P \in \mathrm{supp}(E)$ となることである．

(2) Λ が base-point-free であるとは, Λ が base point をもたないことである．

(3) 集合 $\{F \in \mathrm{Div}(Y) \mid F \geq 0, F$ は"各 $E \in \Lambda$ に対し, $F \leq E$"をみたす $\}$ を考える．これは, 因子の順序 $\geq$ に関する最大元 F をもつ．この F を Λ の fixed part という．また, $\Lambda - F := \{E - F \mid E \in \Lambda\}$ を考えると, $\Lambda - F = (D - F, L)$ であり, これは線形系である．$\Lambda - F$ を Λ の movable part という．

定義 4.9.4 の (3) を正当化する．

命題 4.9.5. $\Lambda = (D, L)$ を線形系とするとき, 次が成り立つ．

(1) 集合 $A := \{F \in \mathrm{Div}(Y) \mid F \geq 0, F$ は"各 $E \in \Lambda$ に対し, $F \leq E$"をみたす $\}$ を考える．A は因子の順序 $\geq$ に関する最大元 F をもつ．

(2) $\Lambda - F = \{E - F \mid E \in \Lambda\}$ を考えると, $\Lambda - F = (D - F, L)$ である．

(3) $\dim(\Lambda - F) = \dim(\Lambda)$, $\deg(\Lambda - F) = \deg(\Lambda) - \deg(F)$ である．

(4) $\Lambda - F$ は base-point-free である.

次に, 線形系は有理写像を定めることをみる. 以下, $\Lambda = (D, L)$ を線形系, $0 \leq r \in \mathbb{Z}$ とする. また, $\dim(\Lambda) = r$ とし, $\{s_0, s_1, \ldots, s_r\}$ を L の k-基底とする. 2 つの集合 Π_0, Π_∞ を次のように定める.

$$\Pi_0 := \{P \in Y \mid s_0(P) = s_1(P) = \cdots = s_r(P) = 0\},$$
$$\Pi_\infty := \{P \in Y \mid P \text{ はある } s_j\ (0 \leq j \leq r) \text{ の極 }\}.$$

非特異射影代数曲線上の有理関数について, その零点や極は有限個しかないので, Π_0, Π_∞ は有限集合である. 点 $P \in Y \setminus \{\Pi_0 \cup \Pi_\infty\}$ に対して $s_i(P)$ は一斉に 0 ではないので, $(s_0(P) : s_1(P) : \cdots : s_r(P)) \in \mathbb{P}^r$ が定まる. よって, 次のような射を得る.

$$Y \setminus (\Pi_0 \cup \Pi_\infty) \to \mathbb{P}^r;\ P \mapsto (s_0(P) : s_1(P) : \cdots : s_r(P))$$

定義 4.9.6. 上の射 $P \mapsto (s_0(P) : s_1(P) : \cdots : s_r(P))$ が代表する有理写像を線形系 Λ に付随する有理写像といい, Φ_Λ で表す.

注意 4.9.7. 定義 4.9.6 の定め方において, 有理写像 $\Phi_\Lambda : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ は基底 $\{s_i\}_{0 \leq i \leq r}$ のとり方に依存している. $\{t_i\}_{0 \leq i \leq r}$ を L の別の基底とする. このとき, $A \in \mathrm{GL}(r+1, k)$ があり, $(s_0, \ldots, s_r) = (t_0, \ldots, t_r){}^tA$ となる. $\{s_i\}$ が定める有理写像を Φ_{Λ, s_i}, $\{t_i\}$ が定める有理写像を Φ_{Λ, t_i} で表すとき, $[A] \circ \Phi_{\Lambda, t_i} = \Phi_{\Lambda, s_i}$ である.

一般に, 2 つの有理写像 $\Phi : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^r$, $\Psi : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ について, $[A] \in \mathrm{PGL}(r, k)$ があり, $[A] \circ \Psi = \Phi$ となるとき, Ψ と Φ は同値であるといい, $\Psi \sim \Phi$ で表す. $\sim$ は同値関係である. よって, 線形系が定める有理写像は同値を除いて一意的に定まる. 射を与えれば, それを代表元とする有理写像が得られるから, 同値の概念を射についても適用する. さらに, 線形系 Λ の fixed part を F とすると, $\Phi_\Lambda = \Phi_{\Lambda - F}$ であることも注意しておく.

次の命題のために, 超平面と非退化性について定義しておく.

定義 4.9.8. $\mathbb{P}^r$ において, 斉次 1 次多項式の零点集合として定まる射影多様体を $\mathbb{P}^r$ における超平面という. 射 $\varphi : Y \to \mathbb{P}^r$ について, 像 $\varphi(Y)$ が $\mathbb{P}^r$ のどの超平面にも含まれないとき, $\varphi(Y)$ は非退化であるという.

命題 4.9.9. 線形系 Λ の定める有理写像 Φ_Λ について, それが定める射 $Y \to \mathbb{P}^r$ も同じ記号 Φ_Λ で表すことにする. このとき, 像 $\Phi_\Lambda(Y)$ は非退化である.

続いて, 線形系と有理写像の対応を述べていく.

補題 4.9.10. Λ は base-point-free とする．$P \in \Pi_0$ のとき, $m_P := \min\{\mathrm{ord}_P(s_j) \mid 0 \leq j \leq r\}$, $P \in \Pi_\infty$ のとき, $n_P := -\min\{\mathrm{ord}_P(s_j) \mid 0 \leq j \leq r\}$ とする．このとき,

$$D = \sum_{P \in \Pi_\infty} n_P P - \sum_{P \in \Pi_0} m_P P = -\min\{\mathrm{div}(s_j) \mid 0 \leq j \leq r\}$$

である．とくに, $\mathrm{supp}(D) = \Pi_0 \cup \Pi_\infty$ である．ここで,

$$\min\{\mathrm{div}(s_j) \mid 0 \leq j \leq r\} := \sum_{P \in Y} \min\{\mathrm{ord}_P(s_j) \mid 0 \leq j \leq r\} P.$$

続いて, 超平面が定める因子を定義する．H を $a_0X_0 + a_1X_1 + \cdots + a_rX_r$ の零点集合として定まる超平面とし, Λ に付随する有理写像が定める射 $Y \to \mathbb{P}^r$ も Φ_Λ で表すことにする．射影多様体から射影空間への射の像は射影多様体であるから, $\Phi_\Lambda(Y)$ は射影多様体であり, $\dim\, \Phi_\Lambda(Y) \leq 1$ である．また, $\Phi_\Lambda(Y)$ は非退化であるから $\Phi_\Lambda(Y) \not\subseteq H$ であり, 命題 4.6.10 より集合 $\Phi_\Lambda(Y) \cap H$ は有限集合である．$P \in Y$ とする．$\Phi_\Lambda(P)$ を零点としてもたない斉次 1 次多項式 $J_{\Phi_\Lambda(P)}$ をとり,

$$h_P := \Phi_\Lambda^*\left(\frac{h}{J_{\Phi_\Lambda(P)}}\right)$$

を考える．ここで, $h := a_0X_0 + \cdots + a_rX_r$ であり, $h/J_{\Phi_\Lambda(P)}$ は $\Phi_\Lambda(Y)$ の開集合 $\Phi_\Lambda(Y) \cap (\mathbb{P}^r \setminus V(J_{\Phi_\Lambda(P)}))$ 上の正則関数 $h/J_{\Phi_\Lambda(P)}$ が定める有理関数を表す．$\mathrm{ord}_P(h_P)$ は $J_{\Phi_\Lambda(P)}$ のとり方によらず定まる．$P \in \Phi_\Lambda^{-1}(H \cap \Phi_\Lambda(Y))$ のとき, $\mathrm{ord}_P(h_P) > 0$ であり, 逆に $\mathrm{ord}_P(h_P) > 0$ なら, $\Phi_\Lambda(P) \in H$ で $P \in \Phi_\Lambda^{-1}(H \cap \Phi_\Lambda(Y))$ である．一方, $P \notin \Phi_\Lambda^{-1}(H \cap \Phi_\Lambda(Y))$ のとき, $\mathrm{ord}_P(h_P) = 0$ であり, 逆もそうである．さらに, $\Phi_\Lambda^{-1}(H \cap \Phi_\Lambda(Y)) \subsetneq Y$ であるから, 命題 4.6.10 より $\Phi_\Lambda^{-1}(H \cap \Phi_\Lambda(Y))$ は有限集合である．$\mathrm{ord}_P(\Phi_\Lambda^* H) := \mathrm{ord}_P(h_P)$ と定める．

定義 4.9.11. Φ_Λ に関する超平面 H の因子 $\Phi_\Lambda^* H$ を

$$\Phi_\Lambda^* H = \sum_{P \in Y} \mathrm{ord}_P(\Phi_\Lambda^* H) P$$

と定める．$\Phi_\Lambda^* H \in \mathrm{Div}(Y)$ であり, $\mathrm{supp}(\Phi_\Lambda^* H) = \Phi_\Lambda^{-1}(H \cap \Phi_\Lambda(Y))$ である．

補題 4.9.12. Λ は base-point-free とし, H を $a_0X_0 + \cdots + a_rX_r$ の零点集合として定まる超平面とする．また, Λ に付随する有理写像が定める射 $Y \to \mathbb{P}^r$ も Φ_Λ で表すことにする．このとき,

$$\Phi_\Lambda^* H = \mathrm{div}\left(\sum_{j=0}^{r} a_j s_j\right) + D \in \Lambda$$

である．とくに, Λ は次のようにかける．

$$\Lambda = \{\Phi_\Lambda^* H \mid H \subseteq \mathbb{P}^r \text{は超平面}\}.$$

補題 4.9.13. $\Phi : Y \to \mathbb{P}^r$ は射で, 像 $\Phi(Y)$ は非退化であるとする．このとき, base-point-free な線形系 Λ で, Φ と Φ_Λ が定める射が等しいものが存在する．

定理 4.9.14. 次のように集合を定める．

$$\mathcal{M} := \{\Lambda \mid \Lambda \text{ は base-point-free な線形系}\},$$

$$\mathcal{N} := \{\Phi : Y \to \mathbb{P}^r \mid \Phi \text{ は射}, 0 \leq r \in \mathbb{Z}, \Phi(Y) \text{ は非退化}\}/\sim.$$

ここで, $\sim$ は以前定めた射の同値による同値関係である．このとき, 写像

$$F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}; \ (\Lambda \mapsto [\Phi_\Lambda])$$

は全単射である．

注意 4.9.15. 定理 4.9.14 において, F の逆写像は次のように与えられる．すなわち, 同値類 $[\Phi] \in \mathcal{N}$ について $\Lambda = \{\Phi^* H \mid H \subseteq \mathbb{P}^r \text{は超平面}\}$ をつくり $[\Phi]$ に対応させる．

5　ガロア点を 2 つもつ射影平面代数曲線

1 節では深澤による「ガロア点 2 つを伴う双有理埋め込みの存在」判定法を紹介する. これにより「ガロア点が 2 つある状況」をいくらか説明できていると思われる. この判定法を正標数の 2 種類の曲線に適用するため, 2 節ではこれらの曲線の基本的性質について論じている. 3 節ではこの判定法を使って, 実際に「ガロア点が 2 つある」平面モデルを作り出す. 1 つの曲線については, 2 節で整理する Weierstrass 点に関する事実を使って, 内ガロア点が「ちょうど 2 つ」であることも証明する. このように「ガロア点の個数を確定する」ひとつの方法を紹介することも目的の一つである.

本章では, $(X:Y:Z)$ を $\mathbb{P}^2$ の斉次座標とし, $(x,y)=(X/Z,Y/Z)$ を $Z\neq 0$ で定まるアフィン平面 $U_Z\simeq\mathbb{A}^2$ のアフィン座標とする.

5.1　ガロア点 2 つを伴う双有理埋め込み

本節では, Y は非特異射影代数曲線とし, 群の同型 $\mathrm{Aut}(Y)\ni\varphi\mapsto\varphi^*\in\mathrm{Aut}_k(k(Y))$ により 2 つの群を同一視する. 深澤は [3] において, 非特異射影代数曲線の射影平面への双有理埋め込みであって, その像がガロア点を 2 つもつようなものが存在するための条件を与えた. ここで, 射 $\varphi:Y\to\mathbb{P}^2$ が双有理埋め込みであるとは, Y と $\varphi(Y)$ が φ によって互いに双有理であることをいう.

定理 5.1.1 ([3], Theorem 1)**.** G_1, G_2 を互いに相異なる $\mathrm{Aut}(Y)$ の有限部分群とする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

(1) 双有理埋め込み $\varphi:Y\to\mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(Y)$ は相異なる 2 つの内ガロア点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $i=1,2$ について $G_{\varphi(P_i)}=G_i$ となるものが存在する.

(2) 次の条件が成り立つ.

(a) $i=1,2$ に対して, $Y/G_i\simeq\mathbb{P}^1$ となる.

(b) $G_1\cap G_2=\{1\}$ である.

(c) 相異なる 2 点 $P_1,P_2\in Y$ があり, 次の因子の等式が成立する.

$$P_1+\sum_{\sigma\in G_1}\sigma(P_2)=P_2+\sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1).$$

注意 5.1.2 ([3], Remark 1)**.** 双有理埋め込み $\varphi:Y\to\mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(Y)$ は相異なる外ガロア点 P_1, P_2 をもち, $i=1,2$ について $G_{P_i}=G_i$ となるものが存在するための必要十

分条件は, 定理 5.1.1 において (a), (b) に加えて, (c) を次の条件 (c') に置き換えることで得られる.

$$\text{(c') } Q \in Y \text{ があり, } \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(Q) = \sum_{\tau \in G_2} \tau(Q) \text{ が因子の等式として成立.}$$

定理 5.1.1, 注意 5.1.2 いずれも証明は同様であるので, 以下, 定理 5.1.1 を示す. 次の補題は点の重複度を考慮しなければ (つまり「2 つのガロア点が特異点と外の点」等となっても良ければ)「ガロア点を 2 つもつ」双有理埋め込みを実現でき, 定理 5.1.1 の証明と重なるところがあるため, 先に示す.

補題 5.1.3. G_1, G_2 を互いに相異なる $\mathrm{Aut}(Y)$ の有限部分群とし, 定理 5.1.1 (2) の条件 (a), (b) をみたすと仮定する. また, $f, g \in k(Y)$ をそれぞれ $k(Y/G_1)$, $k(Y/G_2)$ の k 上の生成系とする. このとき, 有理写像

$$\varphi : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^2;\ (f : g : 1)$$

の定める射は双有理埋め込みであり, $(0:1:0)$, $(1:0:0)$ は $\varphi(Y)$ のガロア点である.

証明. $P_1 := (0:1:0)$, $P_2 := (1:0:0)$ とする. P_1 (resp. P_2) からの射影は

$$\pi_{P_1} : (x:y:1) \mapsto (x:1) \text{ (resp. } \pi_{P_2} : (x:y:1) \mapsto (y:1))$$

で与えられる. したがって,

$$\pi_{P_1} \circ \varphi = (f:1) \text{ (resp. } \pi_{P_2} \circ \varphi = (g:1))$$

である. よって, $k(Y) = k(f, g)$ を示せば十分である. いま, $G_1 = \mathrm{Gal}(k(Y)/k(f))$ であるから, 中間体 $k(f,g) \subseteq k(Y)$ に対応する部分群 $H_1 = \mathrm{Gal}(k(Y)/k(f,g)) \subseteq G_1$ が存在する. 同様に, $G_2 = \mathrm{Gal}(k(Y)/k(g))$ であり, 部分群 $H_2 = \mathrm{Gal}(k(Y)/k(f,g)) \subseteq G_2$ が存在する. したがって, $H_1 = H_2 \subseteq G_1 \cap G_2 = \{1\}$ で $k(Y) = k(f,g)$ である. □

次の補題は定理 5.1.1 の証明で用いる. $C \subset \mathbb{P}^2$ を射影平面代数曲線とする.

補題 5.1.4. P_1, $P_2 \in C_{\mathrm{sm}}$ $(P_1 \neq P_2)$ を内ガロア点とすると, $G_{P_1} \cap G_{P_2} = \{1\}$ である.

証明. $B := \{P \in C_{\mathrm{sm}} \mid P_1 \in T_P(C) \text{ または } P_2 \in T_P(C)\}$ を考えると B は有限集合である. 実際, 命題 4.8.5 より $P \in C_{\mathrm{sm}} \setminus \{P_1, P_2\}$ について, $P \in B$ であるための必要十分条件は "P が $\hat{\pi}_{P_1}$ の ramification point または P が $\hat{\pi}_{P_2}$ の ramification point" である. したがって, $B \subseteq \mathrm{Ram}(\hat{\pi}_{P_1}) \cup \mathrm{Ram}(\hat{\pi}_{P_2}) \cup \{P_1, P_2\}$ である. $i = 1, 2$ について $\hat{\pi}_{P_i}$ はガ

ロア被覆であるから, $\mathrm{Ram}(\hat{\pi}_{P_i})$ は有限集合であり B は有限集合となる. $\sigma \in G_{P_1} \cap G_{P_2}$ とする. 差集合 $C_{\mathrm{sm}} \setminus (B \cup \overline{P_1P_2})$ を考える. B は有限集合であり $\overline{P_1P_2}$ と C_{sm} の交わりは有限個の点であるから, $C_{\mathrm{sm}} \setminus (B \cup \overline{P_1P_2}) \neq \emptyset$ である. $P \in C_{\mathrm{sm}} \setminus (B \cup \overline{P_1P_2})$ をとる. $\overline{P_1P} \neq \overline{P_2P}$ である. $\hat{\pi}_{P_i}(\sigma(P)) = \hat{\pi}_{P_i}(P)$ $(i = 1, 2)$ より, $\sigma(P) \in \overline{P_1P} \cap \overline{P_2P} = \{P\}$ であり, $\sigma \in G_{P_1}(P) := \{\sigma' \in G_{P_1} \mid \sigma'(P) = P\}$ である. ここで, $e(P|\hat{\pi}_{P_1}(P)) = |G_{P_1}(P)|$ が定理 4.7.11 (2) より従うことに注意すると, $P \notin B$ より $|G_{P_1}(P)| = 1$ である. したがって, $\sigma = 1$ である. □

定理 5.1.1 を示す.

証明. はじめに (1) を仮定する. $i = 1, 2$ について $\hat{\pi}_{\varphi(P_i)} := \pi_{\varphi(P_i)} \circ \varphi$ とする. $\hat{\pi}_{\varphi(P_i)} : Y \to \mathbb{P}^1$ はガロア被覆より, $k(\mathbb{P}^1) \simeq k(Y)^{G_i} \simeq k(Y/G_i)$ であるから (a) が従う. (b) は補題 5.1.4 より従う. (c) を示す. $D \in \mathrm{Div}(Y)$ を

$$D := \varphi^*\ell = \sum_{P \in Y} \mathrm{ord}_P(\varphi^*\ell)P$$

とする. ここで, $\ell := \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ であり, D は φ に関する ℓ の因子である (定義 4.9.11 参照). 一方, $\ell \in \mathbb{P}^1$ と考えて, $\mathbb{P}^1$ の因子 ℓ を $\hat{\pi}_{\varphi(P_i)}$ $(i = 1, 2)$ によって引き戻した因子 $\hat{\pi}^*_{\varphi(P_i)}(\ell)$ を考える. いま, $\hat{\pi}_{\varphi(P_i)}$ はガロア被覆であるから, 定理 4.7.11 (3) より

$$\hat{\pi}^*_{\varphi(P_1)}(\ell) = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2),\ \hat{\pi}^*_{\varphi(P_2)}(\ell) = \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1)$$

が成り立つ.

ここで, 次のような $|D|$ の部分線形系を考える.

$$\Delta_i := \{\varphi^*L \mid \varphi(P_i) \in L, L \subseteq \mathbb{P}^2, L \text{ は直線 }\}$$

Δ_i に対応する $L(D)$ の部分空間の基底として, $\varphi(P_i)$ を定義する 2 つの直線に対応するようなものがとれるから, Δ_i の定める有理写像は $\hat{\pi}_{\varphi(P_i)}$ に等しい. さらに, Δ_i に表れる直線 L はすべて $\varphi(Y)$ 上の非特異点 $\varphi(P_i)$ で交わるから, Δ_i の fixed part は P_i である. したがって, $\Delta_i - P_i$ が $\hat{\pi}_{\varphi(P_i)}$ に対応する base-point-free な線形系である. よって,

$$\hat{\pi}^*_{\varphi(P_i)}(\ell) = \varphi^*\ell - P_i = D - P_i$$

である．以上より, (c) の条件が以下のように従う．

$$\begin{aligned} D = P_1 + \hat{\pi}^*_{\varphi(P_1)}(\ell) &= P_1 + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) \\ = P_2 + \hat{\pi}^*_{\varphi(P_2)}(\ell) &= P_2 + \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1). \end{aligned}$$

次に, (2) を仮定する．因子 $D \in \mathrm{Div}(Y)$ を次のように定める．

$$D := P_1 + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) = P_2 + \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1).$$

$i = 1, 2$ について, k-代数の準同型 $k(Y/G_i) \to k(Y)$ に対応する射を $\gamma_i : Y \to Y/G_i$ で表すことにする．いま, $Y/G_1 \simeq \mathbb{P}^1$ であるから Y/G_1 上の有理関数 f' で $(f')_\infty = \gamma_1(P_2)$ なるものがとれる．$\deg((f')_\infty) = 1$ より f' は $k(Y/G_1)$ の k 上の生成系をなす．$f := \gamma_1^*(f')$ とする．このとき, 命題 4.7.4 (1), 定理 4.7.11 (3) より

$$(f)_\infty = \gamma_1^*(\gamma_1(P_2)) = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) = D - P_1$$

となる．さらに, f は $k(Y)^{G_1}$ の k 上の生成系である．同様の手順で, $k(Y)^{G_2}$ の k 上の生成系 g で, $(g)_\infty = D - P_2$ なるものがとれる．射 $\varphi : Y \to \mathbb{P}^2$; $(f : g : 1)$ を考える．条件 (a), (b) より補題 5.1.3 が適用できる．したがって, φ は双有理埋め込みで $Q_1 := (0 : 1 : 0)$, $Q_2 := (1 : 0 : 0)$ は $\varphi(Y)$ のガロア点である．この Q_1, Q_2 がそれぞれ $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ に等しいことを示す．$n_g := -\mathrm{ord}_{P_1}(g) = \mathrm{ord}_{P_1}((g)_\infty) = \mathrm{ord}_{P_1}(D)$ とする．有理写像 $\varphi_1 = (t_{P_1}^{n_g} f : t_{P_1}^{n_g} g : t_{P_1}^{n_g})$ を考える．ここで, t_{P_1} は P_1 における局所パラメータである．この有理写像は φ が定める有理写像と等しく,

$$\mathrm{ord}_{P_1}(t_{P_1}^{n_g} f) = n_g + \mathrm{ord}_{P_1}(f) \geq n_g + 1 - \mathrm{ord}_{P_1}(D) = 1 > 0$$

より $\varphi(P_1) = Q_1$ である．同様に $n_f := -\mathrm{ord}_{P_2}(f) = \mathrm{ord}_{P_2}((f)_\infty) = \mathrm{ord}_{P_2}(D)$ とし, 有理写像 $\varphi_2 = (t_{P_2}^{n_f} f : t_{P_2}^{n_f} g : t_{P_2}^{n_f})$ を考える．ここで, t_{P_2} は P_2 における局所パラメータである．φ が定める有理写像と φ_2 は等しく,

$$\mathrm{ord}_{P_2}(t_{P_2}^{n_f} g) = n_f + \mathrm{ord}_{P_2}(g) \geq n_f + 1 - \mathrm{ord}_{P_2}(D) = 1 > 0$$

より $\varphi(P_2) = Q_2$ である．したがって, $i = 1, 2$ について $G_i = G_{\varphi(P_i)}$ である．ここで, 射 φ の像曲線の次数について考える．$L := \langle f, g, 1 \rangle \subseteq L(D)$ に対応する線形系 $\Lambda = (D, L)$ を考える．$\mathrm{supp}(D) \cap \mathrm{supp}(\mathrm{div}(f) + D) = \{P_1\}$, $\mathrm{supp}(D) \cap \mathrm{supp}(\mathrm{div}(g) + D) = \{P_2\}$

が f, g のとり方より従う．したがって, Λ は base-point-free であり, 定理 4.9.14, 注意 4.9.15 より

$$\Lambda = \{\varphi^* L \mid L \subseteq \mathbb{P}^2, L \text{ は直線 }\}$$

となる．φ は双有理より $\deg(D) = \deg(\varphi(Y))$ である．したがって

$$\deg(\hat{\pi}_{\varphi(P_i)}) = |G_i| = \deg(D) - 1 = \deg(\varphi(Y)) - 1$$

であるから, 命題 3.4.4 (4) より $\varphi(P_i)$ は内ガロア点である． □

注意 5.1.5. 注意 5.1.2 でも述べたように, 定理 5.1.1 の条件 (a), (b) に加えて注意 5.1.2 の条件 (c') をみたすような G_1, G_2 が存在すれば, 同様の方法で像が外ガロア点 2 つを伴う双有理埋め込みが構成できる．また, その双有理埋め込みの像の次数は, 条件 (c') の因子の次数に等しいことが上の証明と同様にわかる．

5.2 曲線 $\mathcal{F}_m$ と曲線 $\mathcal{G}_r$ の基本的性質

この節では, 標数を $p > 0$ とする．

定義 5.2.1. $q := p^n$ $(0 < n \in \mathbb{Z})$ とし, 次のような 2 つの射影平面代数曲線を定義する．

(1) アフィン平面代数曲線 $y^m = x^q + x$ の射影閉包として定義される射影平面代数曲線 $\mathcal{F}_m \subseteq \mathbb{P}^2$．ここで, m は $2 \leq m < q$ をみたす整数で, $q + 1$ を割り切るものとする．

(2) アフィン平面代数曲線 $y^{q^r+1} = x^q + x$ の射影閉包として定義される射影平面代数曲線 $\mathcal{G}_r \subseteq \mathbb{P}^2$．ここで, r は 2 以上の整数とする．

これら 2 つの曲線の性質 (特に Weierstrass 点) については, Stichtenoth [20], Garcia–Viana [7] を参考にした．はじめに $\mathcal{F}_m$ の性質について述べる．

命題 5.2.2. $r : \hat{\mathcal{F}}_m \to \mathcal{F}_m$ を正規化射とする．また, $(T_0 : T_1)$ を $\mathbb{P}^1$ の斉次座標とする．このとき, 次が成り立つ．

(1) 多項式 $f := y^m - x^q - x \in k[x, y]$ は既約であり, アフィン平面代数曲線 $V(f)$ は非特異である．また, $\mathcal{F}_m = \{(0 : 1 : 0)\} \cup V(f)$ である．

(2) $(q, m) = (3, 2) \iff$ 点 $(0 : 1 : 0)$ は $\mathcal{F}_m$ の非特異点である．

(3) $P := (1 : 0 : 0)$ は $\mathcal{F}_m$ の外ガロア点である．

(4) 射影 $\pi_P : \mathcal{F}_m \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ について, $\mathrm{Branch}(\hat{\pi}_P) = \{Q_\infty := (1:0)\}$ であり, $\hat{\pi}_P$ は Q_∞ の上で完全分岐する．また, $\hat{\pi}_P^{-1}(Q_\infty) = \{P_\infty\}$ と表せば, $e(P_\infty|Q_\infty) = q$ である．さらに, $r^{-1}((0:1:0)) = \{P_\infty\}$ である．

(5) $m \in H(P_\infty)$ である．

(6) $g(\hat{\mathcal{F}}_m) = \frac{1}{2}(q-1)(m-1)$ である．

(7) $(d(y)) = ((q-1)(m-1)-2)P_\infty$ である．

証明. (1) $f \in (k[x])[y]$ とみる．$k[x]$ は一意分解整域, x は $k[x]$ の素元である．また, x は $-x^q - x$ を割り切り, x^2 は $-x^q - x$ を割り切らない．よって, アイゼンシュタインの判定法 ([29, 定理 1.12.11] 参照) より, f は $k(x)[y]$ の元として既約である．一方, f は $k[x]$ 上の原始多項式 ([29, 定義 1.11.28] 参照) であるから, [29, 命題 1.11.34] より f は $k[x,y]$ の元として既約である．

次に, アフィン平面代数曲線 $V(f)$ が非特異であることを示す．f_x は変数 x における f の形式的偏微分を表すことにする．$f_x = -1 \neq 0$ であるから, $V(f)$ は非特異である．また, $\mathcal{F}_m$ は斉次多項式 $Z^{q-m}Y^m - X^q - XZ^{q-1}$ の零点集合で与えられる．したがって, $\mathcal{F}_m = \{(0:1:0)\} \cup V(f)$ である．

(2) $(u,v) = (X/Y, Z/Y)$ を $Y \neq 0$ で定まるアフィン平面 $U_Y \simeq \mathbb{A}^2$ のアフィン座標とする．このとき, $\mathcal{F}_m$ は U_Y において $g = v^{q-m} - u^q - uv^{q-1}$ によって定まる．偏微分を計算すると, $g_u = -v^{q-1}$, $g_v = -mv^{q-m-1} + uv^{q-2}$ である．$(q,m) = (3,2)$ とする．このとき, $g_v(0,0) = -m \neq 0$ であり, $(0:1:0)$ は非特異点である．一方, $(0:1:0)$ が非特異点であるとする．$q-1>0$ であるから, $g_v(0,0) \neq 0$ でなければならない．$q-m-1>0$ と仮定すると $g_v(0,0) = 0$ となるから, $q = m+1$ である．m は $q+1$ を割り切るから, 整数 $k \geq 0$ があり $m+2 = q+1 = mk$ と表せる．したがって, $m=2$, $q=3$ である．

(3) 射影 $\hat{\pi}_P$ は $(x:y:1) \mapsto (y:1)$ で代表される．よって, ひきおこされる関数体の拡大は $k(x,y)/k(y)$ である．命題 3.4.4 により $[k(\hat{\mathcal{F}}_m) : \hat{\pi}_P^*(k(\mathbb{P}^1))] = q$ であり, $F(T) = T^q + T - y^m \in (k(y))[T]$ が x の $k(y)$ 上の最小多項式である．形式的微分 $F'(T) = 1 \neq 0$ より x は $k(y)$ 上分離的である．また, $A := \{\lambda \in k \mid \lambda^q + \lambda = 0\}$ を考える．$|A| = q$ である．$B := \{x + \lambda \mid \lambda \in A\} \subseteq k(x,y)$ を考えれば $F(T)$ の根は B の元で尽くされる．よって, $k(x,y)/k(y)$ はガロア拡大で P は外ガロア点である．また, ガロア群 G_P は $G_P = \{(x,y) \mapsto (x+\lambda, y) \mid \lambda \in k, \lambda^q + \lambda = 0\}$ で与えられる．ここで, $(x,y) \mapsto (x+\lambda, y)$ は射影変換がひきおこす $\hat{\mathcal{F}}_m$ の自己同型を表す.

(4) $Q \in \mathbb{P}^1 \setminus \{Q_\infty\}$ とし, $P_{a,b} \in \hat{\mathcal{F}}_m$ は $r(P_{a,b}) = (a,b) \in \mathcal{F}_m$ かつ $\pi_P(a,b) = Q$ をみたすとする．$f_x = -1$ であるから, $P_{a,b}$ での局所パラメータは, $y-b$ である．$\pi_P = (y:1)$

であるから, $e(P'|Q) = 1$ であり $Q \notin \mathrm{Branch}(\hat{\pi}_P)$ である．一方, Q_∞ を考える．x は $\mathcal{F}_m \cap U_Z \subseteq \hat{\mathcal{F}}_m$ 上で定数ではない正則関数であるから, $P_\infty \in \mathrm{supp}((x)_\infty)$ なる $P_\infty \in r^{-1}((0:1:0))$ がある．また, $\hat{\pi}_P(P_\infty) = Q_\infty$ であり, Q_∞ における局所パラメータは T_1/T_0 である．よって, 関係式 $y^m = x^q + x$, 命題 4.6.3 (3) より,

$$-me(P_\infty|Q_\infty) = m\,\mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\hat{\pi}_P^*\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\right) = \mathrm{ord}_{P_\infty}(y^m) = \mathrm{ord}_{P_\infty}(x^q + x) = q\,\mathrm{ord}_{P_\infty}(x)$$

となる．ここで, $\gcd(m, q) = 1$ であり q は $e(P_\infty|Q_\infty)$ を割り切らなければならない. $e(P_\infty|Q_\infty) \leq \deg(\hat{\pi}_P) = q$ であるから, $e(P_\infty|Q_\infty) = -\mathrm{ord}_{P_\infty}(y) = q$ で $\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = -m$ である．いま, $\deg(\hat{\pi}_P) = q$ であるから命題 4.7.4 (3) より $\deg(\hat{\pi}_P^*(Q_\infty)) = q$ である．よって, $\hat{\pi}_P^{-1}(Q_\infty)$ は 1 点集合である．ここで, $r^{-1}(0:1:0) \subseteq \hat{\pi}_P^{-1}(Q_\infty)$ であるから主張が従う.

(5) $\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = -m$ より, $(x)_\infty = mP_\infty$ であるから, $m \in H(P)$ である.

(6) $R := (0:1:0)$ からの射影 π_R は $(x:y:1) \mapsto (x:1)$ で代表される．よって, ひきおこされる関数体の拡大は $k(x,y)/k(x)$ である．いま, $(x)_\infty = mP_\infty$ であるから, $\deg(\pi_R) = m$ である．したがって, $H(T) := T^m - x^q - x$ が y の $k(x)$ 上の最小多項式であり, $k(x,y)/k(x)$ は巡回拡大である．π_Q に対する各点の分岐指数を決定する．はじめに, 点 $P_{a,b}$ について考える．$f_y = my^{m-1}$ より $b \neq 0$ のとき, $x - a$ も $P_{a,b}$ での局所パラメータである．$\pi_R = (x:1)$ より $b \neq 0$ のとき $e(P_{a,b}|\hat{\pi}_R(P_{a,b})) = 1$ である．一方, $b = 0$ のとき, $P_{a,b}$ での局所パラメータは y である．ここで,

$$(x-a)^q + (x-a) = y^m$$

であるから, $\mathrm{ord}_{P_{a,0}}(x-a) = \mathrm{ord}_{P_{a,0}}(y^m) = m$ であり, $e(P_{a,0}|\hat{\pi}(P_{a,0})) = m$. 最後に,

$$e(P_\infty|Q_\infty) = \mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = m$$

である．したがって, Riemann–Hurwitz の分岐公式より次が成立.

$$2g(\hat{\mathcal{F}}_m) - 2 = -2m + (q+1)(m-1),$$
$$2g(\hat{\mathcal{F}}_m) = (q+1)(m-1) - 2(m-1) = (q-1)(m-1),$$
$$g(\hat{\mathcal{F}}_m) = \frac{1}{2}(q-1)(m-1).$$

(7) (6) より

$$(d(x)) = -2(x)_\infty + \sum_{a^q+a=0}(m-1)P_{a,0} + (m-1)P_\infty$$

である．一方, $y^m = x^q + x$ より

$$d(x) = my^{m-1}d(y)$$

であり,

$$(y) = \sum_{a^q+a=0} P_{a,0} - qP_\infty$$

であるから, 次が従う．

$$d(y) = d(x) - (m-1)(y) = (q(m-1) - 2m + (m-1))P_\infty = (2g(\hat{\mathcal{F}}_m) - 2)P_\infty.$$

□

命題 5.2.3. $r : \hat{\mathcal{F}}_m \to \mathcal{F}_m$ を正規化射とすると, 次が成り立つ．

(1) $W := \{P_\infty\} \cup \{P_\lambda = (\lambda : 0 : 1) \in \hat{\mathcal{F}}_m \mid \lambda \in k, \lambda^q + \lambda = 0\}$ とし, $(q, m) \neq (3, 2)$ とする．このとき, W は次の集合に等しい．

$$S^0 := \{P \in \hat{\mathcal{F}}_m \mid m \in H(P)\}.$$

(2) $(q, m) \neq (3, 2)$ のとき $\mathrm{Aut}(\hat{\mathcal{F}}_m)$ は W に作用する．

証明. 命題 5.2.2 (4) より $m \in H(P_\infty)$ であるから $P_\infty \in S^0$ である．次に, $s := (q+1)/m$ とし有理写像

$$\alpha : \mathcal{F}_m \dashrightarrow \mathbb{P}^2;\ \left(\frac{1}{x} : \frac{y}{x^s} : 1\right)$$

を考える．このとき, α は $\mathcal{F}_m$ の自己双有理写像である．実際,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^q + \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^q + x}{x^{q+1}} = \frac{y^m}{x^{sm}}$$

である． α がひきおこす $\hat{\mathcal{F}}_m$ の自己同型も記号 α で表す． $\alpha(W \setminus \{P_0, P_\infty\}) = W \setminus \{P_0, P_\infty\}$ であり α は P_0 と P_∞ を交換する．実際, $(\lambda : 0 : 1) \in W \setminus \{P_0, P_\infty\}$ に対して

$$\alpha((\lambda : 0 : 1)) = \left(\frac{1}{\lambda} : 0 : 1\right)$$

である．よって, $\alpha(W \setminus \{P_0, P_\infty\}) = W \setminus \{P_0, P_\infty\}$ である．また, P_0 における局所パラメータは定理 2.9.3 (の証明) より y である．有理写像

$$\beta : (x : y : 1) \mapsto \left(\frac{y^q}{x} : \frac{y^{q+1}}{x^s} : y^q\right)$$

を考えると有理写像 α と β は等しい．$\mathrm{ord}_{P_0}(x) = m$ であるから

$$\mathrm{ord}_{P_0}\left(\frac{y^q}{x}\right) = q - m > 0,\ \mathrm{ord}_{P_0}\left(\frac{y^{q+1}}{x^s}\right) = 0$$

であり射 α について $\alpha(P_0) = \beta(P_0) = P_\infty$ である．さらに, 命題 5.2.2 (4) の証明より

$$\mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = m > 0,\ \mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\frac{y}{x^s}\right) = -q + sm = 1 > 0$$

であるから射 α について $\alpha(P_\infty) = P_0$ である．自己同型写像において対応する点の Weierstrass 半群は等しいから $P_0 \in S^0$ である．さらに, 命題 5.2.2 (3) とその証明より, $P := (1:0:0) \notin \mathcal{F}_m$ 中心の射影がひきおこす関数体の拡大は次数 $q+1$ のガロア拡大でそのガロア群 G_P は

$$G_P = \{(x, y) \mapsto (x + \lambda, y) \mid \lambda \in k, \lambda^q + \lambda = 0\}$$

で与えられる．G_P は $W \setminus \{P_\infty\}$ に推移的に作用するから $\mathcal{F}_m \cap V(Y)$ の点はすべて同じ Weierstrass 半群をもち, $W \subseteq S^0$ である．

続いて, $W \subsetneq S^0$ と仮定して矛盾を導く．このとき, $P = (a:b:1) \in \mathcal{F}_m \cap U_Z$ $(b \neq 0)$ で Weierstrass 半群 $H(P)$ が m を含むものが存在する．P をアフィン平面の点と考えて $P = (a, b)$ と表示する．$f := y^m - x^q - x$ とし y について偏微分を考えると $f_y = my^{m-1}$ である．$f_y(P) \neq 0$ より定理 2.9.3 から $x - a$ は P における局所パラメータである．同様に $f_x = -1$ より $y - b$ は P における局所パラメータである．また, 命題 4.6.3 (3) より

$$q\,\mathrm{ord}_{P_\infty}(x-a) = \mathrm{ord}_{P_\infty}((x-a)^q + (x-a)) = \mathrm{ord}_{P_\infty}(y^m - b^m) = m\,\mathrm{ord}_{P_\infty}(y)$$

であるから $\mathrm{ord}_{P_\infty}(x-a) = -m$ である．関数 $(x-a)^{m-1}$ を考える．$(x-a)^{m-1} \in L(\mathrm{div}(d(y)))$ である．実際, $L(\mathrm{div}(d(y))) = L((2g-2)P_\infty)$ $(g := g(\hat{\mathcal{F}}_m))$ であり $(x-a)^{m-1}$ は P_∞ 以外の $\hat{\mathcal{F}}_m$ の点で正則, 極の位数について

$$\mathrm{ord}_{P_\infty}((x-a)^{m-1}) = -m(m-1) \geq -2g + 2$$

である．実際, 直接計算を行えば

$$-m(m-1) + 2g - 2 = -m(m-1) + (q-1)(m-1) - 2 = (m-1)(q-m-1) - 2$$

であり, $(q, m) \neq (3, 2)$ より $(m-1)(q-m-1) \geq 2$ である．一方

$$\mathrm{ord}_P((x-a)^{m-1} d(y)) = \mathrm{ord}_P((x-a)^{m-1} d(y-b)) = m - 1$$

である．補題 4.6.37 より $m \notin H(P) \ni m$ で矛盾である．以上より, $W = S^0$ である．

(2) (1) より $W = S^0$ である．$\sigma \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathcal{F}}_m)$ とする．W の点 P と $\sigma(P)$ の Weierstrass 半群について $H(\sigma(P)) = H(P)$ であるから $\sigma(P) \in W$ である． □

注意 5.2.4. より詳しく,

$$S^0 = \{P \in \hat{\mathcal{F}}_m \mid P \text{ における Weierstrass 半群は } m \text{ と } q \text{ で生成される }\}$$

であり, $\hat{\mathcal{F}}_m$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\hat{\mathcal{F}}_m)$ の位数は $|\mathrm{Aut}(\hat{\mathcal{F}}_m)| = m(q-1)q(q+1)$ であることが知られている ([10, Theorem 12.11], [20] 参照).

補題 5.2.5. $\mathcal{F}_m$ の定義と同じ状況で, 射影平面代数曲線 $\mathcal{E}_m : y^m - x^{q+1} + 1 = 0$ を考える．このとき, $\mathcal{F}_m$ と $\mathcal{E}_m$ は互いに双有理である．

証明. $a \in k$ で $a^q + a - 1 = 0$ なるものをとり, 座標変換 $(x, y) \mapsto (x - a, y)$ を行う．

$$\begin{aligned} y^m - (x+a)^q - (x+a) &= y^m - x^q - a^q - x - a \\ &= y^m - x^q - x - 1 \end{aligned}$$

であるから, $\mathcal{F}_m$ は $\overline{\mathcal{F}}_m$ に同型である．ここで, $\overline{\mathcal{F}}_m$ は $y^m - x^q - x - 1 = 0$ で定まる射影平面代数曲線である．次に, 有理写像

$$\overline{\mathcal{F}}_m \to \mathbb{P}^2;\ \left(\frac{1}{x} : \frac{y}{x^s} : 1\right)$$

を考える．ここで, $s := (q+1)/m$ である．このとき,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{q+1} + \left(\frac{1}{x}\right)^q + \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^q + x + 1}{x^{q+1}} = \left(\frac{y}{x^s}\right)^m$$

であるから $\overline{\mathcal{F}}_m$ と射影平面代数曲線 $y^m - x^{q+1} - x^q - x = 0$ は互いに双有理である．最後に, 座標変換 $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ を行えば

$$\begin{aligned} &y^m - (x-1)^{q+1} - (x-1)^q - (x-1) \\ &= y^m - (x^{q+1} - x^q - x + 1) - (x^q - 1) - (x - 1) \\ &= y^m - x^{q+1} + 1 \end{aligned}$$

であり曲線 $\mathcal{E}_m$ の定義式が得られる． □

ここで, $\mathcal{E}_m$ の性質についても述べておく．

命題 5.2.6. $r : \hat{\mathcal{E}}_m \to \mathcal{E}_m$ を正規化射とするとき, 次が成り立つ．

(1) 多項式 $f := y^m - x^{q+1} + 1$ についてアフィン平面代数曲線 $V(f)$ は非特異である.

(2) $P := (1:0:0)$ は $\mathcal{E}_m$ の外ガロア点であり, G_P は位数 $q+1$ の巡回群である.

証明. (1) 偏微分を計算すると $f_x = -x^q$, $f_y = my^{m-1}$ である. $P \in \mathcal{E}_m \cap U_Z$ をアフィン平面の点と考えて $P = (a, b)$ とかく. $P = (a, b) \neq (0, 0)$ より $(f_x(a, b), f_y(a, b)) \neq (0, 0)$ である. $V(f)$ は非特異である.

(2) 射影 $\hat{\pi}_P$ は $(x : y : 1) \mapsto (y : 1)$ で代表される. よって, ひきおこされる関数体の拡大は $k(x, y)/k(y)$ である. 命題 3.4.4 により $[k(\hat{\mathcal{E}}_m) : \hat{\pi}_P^*(k(\mathbb{P}^1))] = q + 1$ であり, $E(T) = T^{q+1} - y^m - 1 \in (k(y))[T]$ が x の $k(y)$ 上の最小多項式である. $E'(T) = T^q \neq 0$ より x は $k(y)$ 上分離的である. また, $A := \{\zeta x \in k(x, y) \mid \zeta^{q+1} = 1\}$ を考える. $|A| = q + 1$ であり $E(T)$ の根はこれで尽くされる. よって, $k(x, y)/k(y)$ はガロア拡大で P は外ガロア点である. また, ガロア群 G_P は $G_P = \{(x, y) \mapsto (\zeta x, y) \mid \zeta \in k, \zeta^{q+1} = 1\}$ で与えられる. ここで, $(x, y) \mapsto (\zeta x, y)$ は射影変換がひきおこす $\hat{\mathcal{E}}_m$ の自己同型を表す. □

次に $\mathcal{G}_r$ の性質について述べる.

命題 5.2.7. $r : \hat{\mathcal{G}}_r \to \mathcal{G}_r$ を正規化射とする. また, $(T_0 : T_1)$ を $\mathbb{P}^1$ の斉次座標とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 多項式 $f := y^{q^r+1} - x^q - x \in k[x, y]$ は既約であり, アフィン平面代数曲線 $V(f)$ は非特異である. また, $\mathcal{G}_r = \{(1:0:0)\} \cup V(f)$ である.

(2) $P := (0:1:0)$ は $\mathcal{G}_r$ の外ガロア点であり, G_P は位数 $q^r + 1$ の巡回群である.

(3) 点 $(1:0:0)$ は $\mathcal{G}_r$ の特異点である.

(4) $r^{-1}((1:0:0))$ はただ 1 点 P_∞ からなる.

(5) $g(\hat{\mathcal{G}}_r) = \frac{1}{2}q^r(q-1)$ である.

証明. (1) f の既約性と $V(f)$ の非特異性については命題 5.2.2 (1) と同様である. また, 射影平面代数曲線 $\mathcal{G}_r$ は斉次多項式 $X^q Z^{q^r-q+1} + XZ^{q^r} - Y^{q^r+1}$ の零点集合で与えられるから $\mathcal{G}_r = \{(1:0:0)\} \cup V(f)$ がわかる.

(2) 射影 $\hat{\pi}_P$ は $(x : y : 1) \mapsto (x : 1)$ で代表される. よって, ひきおこされる関数体の拡大は $k(x, y)/k(x)$ である. 命題 3.4.4 により $[k(\hat{\mathcal{G}}_r) : \hat{\pi}_P^*(k(\mathbb{P}^1))] = q^r + 1$ であり, $G(T) = T^{q^r+1} - x^q - x \in (k(x))[T]$ が y の $k(x)$ 上の最小多項式である. $G'(T) = T^{q^r} \neq 0$ より y は $k(x)$ 上分離的である. また, $A := \{\zeta y \in k(x, y) \mid \zeta^{q^r+1} = 1\}$ を考える. $|A| = q^r + 1$ であり $G(T)$ の根はこれで尽くされる. よって, $k(x, y)/k(x)$ はガロア拡大

で P は外ガロア点である．また，ガロア群 G_P は $G_P = \{(x,y) \mapsto (x,\zeta y) \mid \zeta^{q^r+1} = 1\}$ で与えられる．ここで，$(x,y) \mapsto (x,\zeta y)$ は射影変換がひきおこす $\hat{\mathcal{G}}_r$ の自己同型を表す．

(3) $(u,v) = (Y/X, Z/X)$ を $X \neq 0$ で定まるアフィン平面 $U_X \simeq \mathbb{A}^2$ のアフィン座標とする．このとき，$\mathcal{G}_r$ は U_X において $g = v^{q^r-q+1} + v^{q^r} - u^{q^r+1}$ によって定まる．偏微分を計算すると，$g_u = -u^{q^r}$, $g_v = v^{q^r-q}$ である．したがって，$(1:0:0)$ は $\mathcal{G}_r$ の特異点である．

(4) x は $\mathcal{G} \cap U_Z \subseteq \hat{\mathcal{G}}_r$ 上で定数ではない正則関数である．したがって，$P_\infty \in \mathrm{supp}((x)_\infty)$ となる点 $P_\infty \in r^{-1}((1:0:0))$ がある．$\hat{\pi}_P(P_\infty) = (1:0) =: Q_\infty$ である．$\mathbb{P}^1$ の $(1:0)$ における局所パラメータは T_1/T_0 であるから

$$e(P_\infty|Q_\infty) = \mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\hat{\pi}_P^*\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right) = -\mathrm{ord}_{P_\infty}(x)$$

である．関係式 $y^{q^r+1} = x^q + x$, 命題 4.6.3 (3) より

$$(q^r+1)\mathrm{ord}_{P_\infty}(y) = \mathrm{ord}_{P_\infty}(x^q + x) = q\,\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = -q\,e(P_\infty|Q_\infty)$$

である．$\gcd(q^r+1, q) = 1$ より $e(P_\infty|Q_\infty) = q^r + 1$ である．いま，$\deg(\hat{\pi}_P) = q^r + 1$ であるから命題 4.7.4 (3) より $\deg(\hat{\pi}_P^*(Q_\infty)) = q^r + 1$ である．よって，$\hat{\pi}_P^{-1}(Q_\infty) = \{P_\infty\}$ である．$r^{-1}(1:0:0) \subseteq \hat{\pi}_P^{-1}(Q_\infty)$ より結論を得る．

(5) $P' \in \mathcal{G}_r \cap U_Z = V(f)$ とする．P' をアフィン平面の点と考えて $P' = (a,b)$ と表す．f のそれぞれの変数での偏微分を計算すると，$f_x = -1$, $f_y = y^{q^r}$ である．はじめに，$b \neq 0$ のときを考える．$f_y(a,b) \neq 0$ であるから定理 2.9.3 より P' における局所パラメータは $x - a$ である．一方，$\hat{\pi}_P(P') = (a:1)$ であり $(a:1)$ における $\mathbb{P}^1$ の局所パラメータは $(T_0 - aT_1)/T_1$ である．したがって，

$$e(P'|\hat{\pi}_P(P')) = \mathrm{ord}_{P'}\left(\hat{\pi}_P^*\left(\frac{T_0 - aT_1}{T_1}\right)\right) = \mathrm{ord}_{P'}(x-a) = 1$$

である．次に，$b = 0$ のときを考える．定理 2.9.3 より P' における局所パラメータは y である．また，$P' \in V(f)$ より $a^q + a = 0$ である．関係式 $y^{q^r+1} = (x-a)^q + (x-a)$ と命題 4.6.3 (3) より

$$\begin{aligned} q^r + 1 &= \mathrm{ord}_{P'}(y^{q^r+1}) \\ &= \mathrm{ord}_{P'}((x-a)^q + (x-a)) \\ &= \mathrm{ord}_{P'}(x-a) \end{aligned}$$

である．$b \neq 0$ の場合と同じように $e(P'|\hat{\pi}_P(P')) = \mathrm{ord}_{P'}(x-a) = q^r + 1$ である．したがって，$\mathrm{Ram}(\hat{\pi}_P) = \{P_\infty\} \cup \{(a:0:1) \mid a \in k, a^q + a = 0\}$ である．$\gcd(q^r+1, p) = 1$

であるから, Riemann–Hurwitz の分岐公式より

$$2(\hat{\mathcal{G}}_r)-2=-2(q^r+1)+(q+1)q^r,$$
$$2(\hat{\mathcal{G}}_r)=(q+1)q^r-2q^r$$

である. したがって, $g(\hat{\mathcal{G}}_r)=\frac{1}{2}q^r(q-1)$ である. □

命題 5.2.8. 定数 $b\in k\setminus\{0\}$ を $b=(-1)^{r-1}b^{q^{2r}}$ となるようなものとしてとり, 多項式

$$g_b(y):=\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i b^{q^{i+r}}y^{q^i}\in k[y]$$

を考える. このとき, $g_b(y)$ は次の性質をもつ.

(1) $g_{-b}(y)=-g_b(y)$.
(2) すべての $a\in k$ に対して $g_b(-a)=-g_b(a)$.
(3) すべての $a\in k$ に対して $g_b(y+a)=g_b(y)+g_b(a)$.
(4) $(g_b(y))^q+g_b(y)=by^{q^r}+b^{q^r}y$.

証明. (1), (2) は定義より明らかである. (3) は体のフロベニウス準同型に注意すれば明らかである. したがって, (4) のみ示す.

$$(g_b(y))^q=\left(\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i b^{q^{i+r}}y^{q^i}\right)^q=\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i b^{q^{i+r+1}}y^{q^{i+1}}=\sum_{i'=1}^{r}(-(-1)^{i'})b^{q^{r+i'}}y^{q^{i'}}$$

であるから,

$$(g_b(y))^q+g_b(y)=\sum_{i=1}^{r}(-(-1)^i)b^{q^{r+i}}y^{q^i}+\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i b^{q^{r+i}}y^{q^i}=by^{q^r}+b^{q^r}y$$

となり証明が完了する. □

5.3 曲線 $\mathcal{F}_m$ と曲線 $\mathcal{G}_r$ のガロア点を 2 つもつ平面モデル

これまでの内容を踏まえて, 次を証明する.

定理 5.3.1 (深澤–東根 [5])**.** $\hat{\mathcal{F}}_m$ を射影平面代数曲線 $\mathcal{F}_m$ の非特異モデルとする. このとき, 次が成立する.

(1) 次の条件をみたす射 $\varphi:\hat{\mathcal{F}}_m\to\mathbb{P}^2$ が存在する: 射 φ はその像への双有理写像で, $\deg(\varphi(\hat{\mathcal{F}}_m))=q+1$ であり, 像 $\varphi(\hat{\mathcal{F}}_m)$ は内ガロア点を 2 つもつ. さらに, $(q,m)\neq(3,2)$ であれば, 内ガロア点の個数はちょうど 2 つである.

(2) 次の条件をみたす射 $\psi : \hat{\mathcal{F}}_m \to \mathbb{P}^2$ が存在する: 射 ψ はその像への双有理写像で, $\deg(\psi(\hat{\mathcal{F}}_m)) = q+1$ であり, 像 $\psi(\hat{\mathcal{F}}_m)$ は外ガロア点を 2 つもつ.

証明. (1) 定理 5.1.1 における 3 つの条件 (a), (b), (c) をみたすようなものをみつけることで, 条件をみたす射の存在を示す. 命題 5.2.2 (3) とその証明より, $P := (1:0:0) \notin \mathcal{F}_m$ 中心の射影がひきおこす関数体の拡大は次数 $q+1$ のガロア拡大でそのガロア群 G_P は

$$G_P = \{(x,y) \mapsto (x+\lambda, y) \mid \lambda \in k, \lambda^q + \lambda = 0\}$$

で与えられる. $G_1 := G_P$ とする. 次に, $s := (q+1)/m$ とし有理写像

$$\alpha : \mathcal{F}_m \dashrightarrow \mathbb{P}^2;\ \left(\frac{1}{x} : \frac{y}{x^s} : 1\right)$$

を考える. このとき, 命題 5.2.3 (1) の証明と同様に α が $\mathcal{F}_m$ の自己双有理写像であることがわかる. α がひきおこす $\hat{\mathcal{F}}_m$ の自己同型も同じ記号 α で表し, $G_2 := \alpha G_1 \alpha^{-1}$ とおく.

$W := \{P_\infty\} \cup \{P_\lambda = (\lambda : 0 : 1) \mid \lambda \in k, \lambda^q + \lambda = 0\}$ を考える. 命題 5.2.2 (4) より $\mathcal{F}_m$ の $(0:1:0)$ における正規化射の fiber はただ 1 点 P_∞ から成るので, G_1 は $W \setminus \{P_\infty\}$ に推移的に作用し P_∞ を固定する. 一方, 命題 5.2.3 (1) の証明を思い出せば, $\alpha(W \setminus \{P_0, P_\infty\}) = W \setminus \{P_0, P_\infty\}$ であり α は P_0 と P_∞ を交換する.

以上より, G_2 は P_0 を固定し $W \setminus \{P_0\}$ に推移的に作用する. よって,

$$\{P_\infty\} \cup \{\sigma(P_0) \mid \sigma \in G_1\} = W = \{P_0\} \cup \{\tau(P_\infty) \mid \tau \in G_2\}$$

である. また, $k(\hat{\mathcal{F}}_m)^{G_1} = k(1/y) \simeq k(\mathbb{P}^1)$, $k(\hat{\mathcal{F}}_m)^{G_2} = k(x^s/y) \simeq k(\mathbb{P}^1)$ が成立する. さらに, G_1 と G_2 は固定点が異なるので, $G_1 \cap G_2 = \{1\}$ である. よって, 定理 5.1.1 とその証明より主張にあるような射の存在がいえる.

続いて, $(q,m) \neq (3,2)$ とする. 内ガロア点がちょうど 2 つであることを示す. いま, W は次の集合に等しいことに注意する (命題 5.2.3 (1) 参照):

$$S^0 = \{P \in \hat{\mathcal{F}}_m \mid P \text{ における Weierstrass 半群 } H(P) \text{ は } m \text{ を含む}\}.$$

また, 定理 5.1.1 の証明 “(2) ならば (1)” より (1) の条件をみたす射は次のようである.

$$\varphi = \left(\frac{1}{y} : \frac{x^s}{y} : 1\right).$$

$\varphi(W)$ を考える. $\varphi(P_\infty) = (0:1:0)$, $\varphi(P_\lambda) = (1:\lambda^s:0)$ $(\lambda^q + \lambda = 0)$ である. 実際, 命題 5.2.2 (4) の証明より

$$\mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\frac{1}{y}\right) = q,\ \mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\frac{x^s}{y}\right) = -sm + q = -1$$

である．P_∞ の局所パラメータ t_{P_∞} をとり,

$$\varphi_\infty = \left(\frac{t_{P_\infty}}{y} : \frac{x^s t_{P_\infty}}{y} : t_{P_\infty}\right)$$

を考えれば, 有理写像 φ, φ_∞ は等しく $\varphi(P_\infty) = (0:1:0)$ である．一方, $P_\lambda \in W \setminus \{P_\infty\}$ における局所パラメータは定理 2.9.3 より y である．$\overline{\varphi} = (1 : x^s : y)$ を考えれば, 有理写像 φ と $\overline{\varphi}$ は等しく $\varphi(P_\lambda) = (1 : \lambda^s : 0)$ である．よって, $\varphi(W) = \varphi(\hat{\mathcal{F}}_m) \cap \{Z = 0\}$ である．

$\varphi(R)$ を内ガロア点とする．付随するガロア群 $G_{\varphi(R)} = \mathrm{Gal}(k(\hat{\mathcal{F}}_m)/\hat{\pi}^*_{\varphi(R)}(k(\mathbb{P}^1)))$ について $\varphi(R)$ が内ガロア点であることより,

$$\deg(\hat{\pi}_{\varphi(R)}) = |G_{\varphi(R)}| = q$$

となる．一方, 命題 5.2.3 (2) より $G_{\varphi(R)}$ は自然に W に作用する．$G_{\varphi(R)}$ は p 群であり $|W| = q+1$ より, $P \in W$ で, すべての $\eta \in G_{\varphi(R)}$ に対し $\eta(P) = P$ なるものがある ([23, p. 82, (1.3)] 参照)．よって, 定理 4.7.11 (2) より $\hat{\pi}_{\varphi(R)}$ は P において完全分岐する．

ここで, $\varphi(R) \in \{Z = 0\}$ を示す．$\varphi(R) \notin \{Z = 0\}$ と仮定する．射影 $\pi_{\varphi(P_\infty)}$ を考えれば, その中心点における ramification index は

$$e(P_\infty | \hat{\pi}_{\varphi(P_\infty)}(P_\infty)) = \mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\frac{1}{y}\right) = q$$

である．命題 4.8.5 (2) より

$$I_{\varphi(P_\infty)}(T_{\varphi(P_\infty)}(\varphi(\hat{\mathcal{F}}_m)), \varphi(\hat{\mathcal{F}}_m)) = q+1$$

である．したがって, φ に関する, $\varphi(P_\infty)$ における接線の因子の support は P_∞ のみからなる．よって, $\overline{\varphi(R)\varphi(P_\infty)}$ は $\varphi(P_\infty)$ における接線ではない．したがって, $P' \notin W$ ($P' \neq R$) で $\varphi(P') \in \overline{\varphi(R)\varphi(P_\infty)}$ なるものが存在する．一方で, $\hat{\pi}_{\varphi(R)}$ はガロア被覆より, $G_{\varphi(R)}$ は fiber $\hat{\pi}^{-1}_{\varphi(R)}(\overline{\varphi(R)\varphi(P_\infty)})$ に推移的に作用する (定理 4.7.11 (1)) から, $\eta' \in G_{\varphi(R)}$ で $\eta(P_\infty) = P'$ なるものがある．自己同型において対応する点の Weierstrass 半群は等しいから $W = S^0$ であることより矛盾である．したがって, $\varphi(R) \in \{Z = 0\}$ である．

また, $R = P$ である．$\varphi(R) \neq \varphi(P)$ と仮定して矛盾を導く．$\hat{\pi}_{\varphi(R)}$ の $\overline{\varphi(R)\varphi(P)}$ における fiber は $W \setminus \{R\}$ に等しい．一方で, $\hat{\pi}_{\varphi(R)}$ は P で完全分岐するから矛盾である．

最後に, 各点 $\varphi(Q) \in \varphi(W) \setminus \{\varphi(P_0), \varphi(P_\infty)\}$ からの射影を計算する．$Q = (\lambda : 0 : 1)$ ($\lambda \neq 0$) とする．$\varphi(W)$ の計算を思い出せば, $\varphi(Q) = (1 : \lambda^s : 0)$ であるから射 $\hat{\pi}_{\varphi(Q)}$ は

$$\hat{\pi}_{\varphi(Q)} = \left(\frac{x^s - \lambda^s}{y} : 1\right)$$

で代表される．また, $\mathrm{ord}_Q(x^s-\lambda^s)=m$ である．実際

$$x^s-\lambda^s=(x-\lambda)(x^{s-1}+\lambda x^{s-2}+\lambda^2 x^{s-3}+\cdots+\lambda^{s-1})$$

であり, 上記等式の右辺における, $x-\lambda$ ではない方の式の点 $(\lambda:0:1)$ での値を考えれば

$$\lambda^{s-1}+\lambda\lambda^{s-2}+\lambda^2\lambda^{s-3}+\cdots+\lambda^{s-1}=s\lambda^{s-1}\neq 0$$

である．ここで, $\gcd(s,p)=1$ より $s\neq 0$ に注意しておく．よって,

$$e(Q|\hat{\pi}_{\varphi(Q)}(Q))=\mathrm{ord}_Q\left(\frac{x^s-\lambda^s}{y}\right)=m-1<q$$

である． 実際, Q における局所パラメータは定理 2.9.3 より y であり, 関係式 $y^m=(x-\lambda)^q+(x-\lambda)$ より $\mathrm{ord}_Q(x-\lambda)=m$ である．射影 $\hat{\pi}_{\varphi(R)}$ はその中心点で完全分岐しなければならないから, $\varphi(R)=\varphi(P_0)$ または $\varphi(P_\infty)$ である．

(2) 補題 5.2.5 より, 射影平面代数曲線 $\mathcal{E}_m$ に関して注意 5.1.2 に述べたような条件 (a), (b), (c') を示せばよい．$\hat{\mathcal{E}}_m$ を $\mathcal{E}_m$ の非特異モデルとする．$V=\{(\zeta:0:1)\mid\zeta\in k,\zeta^{q+1}=1\}$ とする．命題 5.2.6 (2) とその証明より, $P:=(1:0:0)$ 中心の射影がひきおこす関数体の拡大は次数 $q+1$ の巡回拡大である．また, そのガロア群 G_P は

$$G_P=\{(x,y)\mapsto(\zeta x,y)\mid\zeta\in k,\zeta^{q+1}=1\}$$

で与えられる．$G_1:=G_P$ とする．G_1 は V に推移的に作用する．次に, 有理写像

$$\beta:\mathcal{E}_m\dashrightarrow\mathbb{P}^2;\ \left(\frac{x+\lambda(x-1)}{1+\lambda(x-1)}:\frac{y}{(1+\lambda(x-1))^s}:1\right)$$

を考える．ここで, $\lambda\in k\setminus\{0,1\}$ であり $\lambda^q+\lambda=0$ をみたす．また, $s:=(q+1)/m$ である．β は自己双有理写像である．実際,

$$\left(\frac{y}{(1+\lambda(x-1))^s}\right)^m-\left(\frac{x+\lambda(x-1)}{1+\lambda(x-1)}\right)^{q+1}+1$$

$$=\frac{y^m-(x+\lambda(x-1))^{q+1}+(1+\lambda(x-1))^{q+1}}{(1+\lambda(x-1))^{q+1}}$$

であり, 分子について

$$\begin{aligned}&x^{q+1}-1-(x^{q+1}+\lambda(x-1)x^q+\lambda^q x(x-1)^q+\lambda^{q+1}(x-1)^{q+1})\\&+(1+\lambda(x-1)+\lambda^q(x-1)^q+\lambda^{q+1}(x-1)^{q+1})\\&=-\lambda(x-1)x^q+\lambda x(x^q-1)+\lambda(x-1)-\lambda(x^q-1)=0\end{aligned}$$

となる．また，

$$h_1 := \frac{x+\lambda(x-1)}{1+\lambda(x-1)} = \frac{x-1}{\lambda(x-1)+1} + 1,\ h_2 := \frac{y}{(1+\lambda(x-1))^s}$$

とすれば

$$\frac{1}{h_1-1} = \lambda + \frac{1}{x-1}$$

であるから $k(x,y) \subseteq k(h_1,h_2)$ である．逆の包含は明らかであり，β は自己双有理写像である．β は V に推移的に作用する．実際，命題 5.2.6 (1) より $\mathcal{E}_m \cap U_Z$ は非特異で β は双有理写像であるから，$\beta(V) \subseteq V$ を示せば十分である．$P_\zeta := (\zeta : 0 : 1) \in V$ をとる．このとき，

$$\beta(P_\zeta) = (h_1(P_\zeta) : 0 : 1)$$

である．$1+\lambda(\zeta-1) \neq 0$ を注意しておく．ここで，$\beta(P_\zeta)$ は $\mathcal{E}_m$ 上にあるので

$$(h_1(P_\zeta))^{q+1} = 1$$

であり $\beta(V) \subseteq V$ である．

β がひきおこす $\hat{\mathcal{E}}_m$ の自己同型も β で表すことにする．$G_2 := \beta G_1 \beta^{-1}$ とする．部分群 $G_1 \cap G_2$ が自明であることを示す．$Q := (0 : \omega : 1) \in \mathcal{E}_m$ $(\omega^m + 1 = 0)$ とする．このとき，$\beta(Q) = (\lambda/(\lambda-1) : \omega/(1-\lambda)^s : 1)$ である．Q は G_1 の固定点であるから $\beta(Q)$ は G_2 のすべての元で固定される．一方，$\sigma = (\zeta x : y : 1) \in G_1$ $(\zeta^{q+1} = 1, \zeta \neq 1)$ をとるとき，

$$\sigma(\beta(Q)) = \left(\frac{\zeta\lambda}{\lambda-1} : \frac{\omega}{(1-\lambda)^s} : 1\right) \neq \left(\frac{\lambda}{\lambda-1} : \frac{\omega}{(1-\lambda)^s} : 1\right) = \beta(Q)$$

である．よって，$G_1 \cap G_2$ は自明である．また，$k(\hat{\mathcal{E}}_m)^{G_1} = k(y) \simeq k(\mathbb{P}^1)$, $k(\hat{\mathcal{E}}_m)^{G_2} = k(\beta^*(y)) \simeq k(\mathbb{P}^1)$ である．さらに，G_1, G_2 は V に推移的に作用するから，

$$\{\sigma(1:0:1) \mid \sigma \in G_1\} = X = \{\tau(1:0:1) \mid \tau \in G_2\}$$

が成立する．注意 5.1.2, 注意 5.1.5 より定理が従う． □

定理 5.3.2 (深澤–東根 [5])**.** $\hat{\mathcal{G}}_r$ を射影平面代数曲線 $\mathcal{G}_r$ の非特異モデルとする．このとき，次の条件をみたす射 $\xi : \hat{\mathcal{G}}_r \to \mathbb{P}^2$ が存在する: 射 ξ はその像への双有理写像で，$\deg(\xi(\hat{\mathcal{G}}_r)) = q^r + 1$ であり，像 $\xi(\hat{\mathcal{G}}_r)$ は外ガロア点を 2 つもつ．

証明. 注意 5.1.2 に述べたような条件 (a), (b), (c') を示せばよい．命題 5.2.7 (2) とその証明より, $P := (0:1:0) \notin \mathcal{G}_r$ 中心の射影がひきおこす関数体の拡大は次数 q^r+1 のガロア拡大である．そのガロア群 G_P は

$$G_P = \{(x,y) \mapsto (x, \zeta y) \mid \zeta^{q^r+1} = 1\}$$

で与えられる．$G_1 := G_P$ とする．命題 5.2.7 (4) より $\mathcal{G}_r$ の $(1:0:0)$ における正規化射の fiber はただ 1 点 P_∞ から成るので, G_1 は P_∞ を固定する．

続いて, $b, c \in k \setminus \{0\}$ を $b = (-1)^{r-1} b^{q^{2r}}$, $c^q + c = b^{q^r+1}$ なるようなものとしてとり, 多項式

$$g_b(y) := \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i b^{q^{i+r}} y^{q^i} \in k[y]$$

を考える．次の有理写像を考える．

$$\gamma : \mathcal{G}_r \dashrightarrow \mathbb{P}^2;\ (x:y:1) \mapsto (g_b(y) + c + x : y + b : 1).$$

これは $\mathcal{G}_r$ の自己双有理写像である．実際, 命題 5.2.8 より

$$\begin{aligned}(y+b)^{q^r+1} &= y^{q^r+1} + by^{q^r} + b^{q^r} y + b^{q^r+1} \\ &= (x^q + x) + ((g_b(y))^q + g_b(y)) + (c^q + c) \\ &= (g_b(y) + c + x)^q + (g_b(y) + c + x)\end{aligned}$$

である．γ がひきおこす $\hat{\mathcal{G}}_r$ の自己同型も同じ記号で表すとする．γ は $\mathcal{G}_r \cap U_Z$ の間の同型をひきおこすから P_∞ を固定する．

$G_2 := \gamma G_1 \gamma^{-1}$ とする．部分群 $G_1 \cap G_2$ が自明な群であることを示す．そのために, 点 $R := (\alpha : 0 : 1)$ $(\alpha^q + \alpha = 0)$ を考える．このとき, $\gamma(R) = (c + \alpha : b : 1)$ である．G_1 は R を固定するから, $\gamma(R)$ は G_2 のすべての元で固定される．$\sigma = (x : \zeta y : 1) \in G_1$ $(\zeta \in k \setminus \{1\}, \zeta^{q^r+1} = 1)$ を考えると

$$\sigma(\gamma(R)) = (c + \alpha : \zeta b : 1) \neq (c + \alpha : b : 1) = \gamma(R)$$

が成立する．よって, $G_1 \cap G_2$ は自明である．また,

$$\sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_\infty) = (q^r + 1) P_\infty = \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_\infty)$$

である．さらに, $k(\hat{\mathcal{G}}_r)^{G_1} = k(x) \simeq k(\mathbb{P}^1)$, $k(\hat{\mathcal{G}}_r)^{G_2} = k(\gamma^*(x)) \simeq k(\mathbb{P}^1)$ である．よって, 注意 5.1.2, 注意 5.1.5 より定理が従う． □

6 おわりに: 実際に研究するに当たって

本書の前半部を終えた読者は, 例えば「4 次平面曲線の外ガロア点」「5 次平面曲線の内ガロア点」を研究することができる. 本書により射影を計算できるため, 後はガロアかどうかの判定をすれば良いわけであるが, その拡大が 4 次であれば, それを判定する手段はガロア理論の多くのテキストに掲載されている. 実際に, これまでの深澤研究室の修了生のうち数名がこれらの内容で修士論文を書いた.

本書の後半部まで終えられた読者は, ガロア点研究を行える知識を概ね得ていると言える. ガロア点配置を特定するにはガロア被覆の基本的な性質 (定理 4.7.11) が有効である. このなかの「分岐が整う」という性質を使ってガロア点の位置を特定する作業は「ガロア点研究の感覚」を養うのに役立つ. 本書では「ガロア点を 2 つ登場させる」という結果を紹介し,「それ以外にない」という結果に Weierstrass 点を使った議論を紹介している.「それ以外にない」という方向で本書で述べ切れていない可能性があるのは,「変曲点の個数上限」だけである. 多くの場合, ガロア点一つに対して変曲点がたくさん必要となるため, この上限は大変便利である. 変曲点に関しては, [22] を参考にするとよい.

ガロア点の未解決問題集 [27] には 70 問以上の問題が掲載されているので, 一読をお薦めする. この問題集の中のどれかを解ければ, 論文にできるであろう.

主観ではあるが, ガロア点理論の発展として「標数零において, 内ガロア点は最大で 4 個, 外ガロア点は最大で 3 個」という予想が解かれることが大変重要であると思う. 問題の解決自体もそうであるが, それ以上に, 解かれる過程で良いアイデアや手法が提案され, それが確立されることが望ましい. 現在でも良い手法が揃ってきており, 個人的には遅くとも 2026 年頃には解かれるのではないかと予想している. 一方, もし読者が「変曲点」や「Weierstrass 点」以外のテクニックを使って, ガロア点の個数を確定できたならば, それは新たな手法を見つけられた可能性が高い. むしろそのような新発見が, ガロア点理論の発展には必要かもしれない. 挑戦を求む!

他には「ガロア点による自己同型が射影変換に拡張される」という定理も必要だ, という方もいらっしゃるかもしれない. 但しこれが保証されるのは「非特異平面曲線」に限定される. 非特異平面曲線についてはガロア点の基本問題は解決されているので, これを敢えて網羅した命題群の中に入れなかった. しかしながらその基本問題解決の証明は, ガロア点研究の根幹をなすものであり, ガロア点理論を語る上で本当はとても重要である.

文責: 深澤　知

参考文献

[1] 藤崎源二郎, 体とガロア理論, 岩波書店, 1991.

[2] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Geom. Dedicata **139** (2009), 211–218.

[3] S. Fukasawa, A birational embedding of an algebraic curve into a projective plane with two Galois points, J. Algebra **511** (2018), 95–101.

[4] S. Fukasawa and T. Hasegawa, Singular plane curves with infinitely many Galois points, J. Algebra **323** (2010), 10–13.

[5] S. Fukasawa and K. Higashine, A birational embedding with two Galois points for certain Artin–Schreier curves, Finite Fields Appl. **52** (2018), 281–288.

[6] W. Fulton, Algebraic Curves, Benjamin, New York (1969).

[7] A. Garcia and P. Viana, Weierstrass points on certain non-classical curves, Arch. Math. **46** (1986), 315–322.

[8] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg (1977).

[9] 東根一樹, Plane curves with two Galois points, 修士論文, 山形大学大学院理工学研究科数理科学専攻, 2018 年 3 月.

[10] J. W. P. Hirschfeld, G. Korchmáros and F. Torres, Algebraic Curves over a Finite Field, Princeton Univ. Press, Princeton (2008).

[11] M. Homma, Galois points for a Hermitian curve, Comm. Algebra **34** (2006), 4503–4511.

[12] 楫元, 標数 p の世界, 数理科学 1994 年 3 月号「代数幾何の広がり」, サイエンス社.

[13] 梶原健, 代数曲線入門, 日本評論社, 2004.

[14] S. L. Kleiman, Tangency and duality, Proceedings of the 1984 Vancouver Conference in Algebraic Geometry, pp.163–226, CMS Conf. Proc. **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[15] S. L. Kleiman, Multiple tangents of smooth plane curves (after Kaji), Algebraic geometry: Sundance 1988, pp. 71–84, Contemp. Math. **116**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[16] 今野一宏, リーマン面と代数曲線, 共立出版, 2015.

[17] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968.

[18] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226** (2000), 283–294.

[19] I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1, Second edition, Springer-Verlag, Berlin Heiderbelg New York (1994).

[20] H. Stichtenoth, Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik. II. Ein spezieller Typ von Funktionenkörpern, Arch. Math. **24** (1973), 615–631.

[21] H. Stichtenoth, Algebraic Function Fields and Codes, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1993).

[22] K.-O. Stöhr and J. F. Voloch, Weierstrass points and curves over finite fields, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), 1–19.

[23] 鈴木通夫, 群論 上, 岩波書店, 1977.

[24] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340–355.

[25] H. Yoshihara, Families of Galois closure curves for plane quartic curves, J. Math. Kyoto Univ. **43** (2003), 651–659.

[26] H. Yoshihara, Galois embedding of algebraic variety and its application to abelian surface, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **117** (2007), 69–86.

[27] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, available at: https://sites.google.com/sci.kj.yamagata-u.ac.jp/fukasawa-lab/open-questions-english

[28] 雪江明彦, 代数学 1 群論入門, 日本評論社, 2010.

[29] 雪江明彦, 代数学 2 環と体とガロア理論, 日本評論社, 2010.

[30] 雪江明彦, 代数学 3 代数学のひろがり, 日本評論社, 2011.