ガロワ拡大を体内から作る

吉 原 久 夫

ガロワ拡大は体 K が与えられたとき、(ふつうは上を見上げて) K の拡大体 L で考える。しかし、その反対に（上から目線で）K の部分体 k を選んで、K/k がガロワ拡大となるものを探す、これを幾何学的に行う方法がガロワ点の考え方である。多様体としては、被覆を作るか、商多様体をつくるかの違いである。具体的に調べてみよう[1]。

1 変数代数関数体 $k(x,y)$ に対して、$x,\ y$ の 1 次分数式 t で $k(x,y)/k(t)$ がガロワ拡大になるような t を探す。すなわち、$x,\ y$ の 1 次式[2]$\ell_1(x,y),\ \ell_2(x,y)$ を選んで、$k(x,y)/k(\ell_2/\ell_1)$ が（有限次）ガロワ拡大になるのはいつか？という問題を考える。これは平面の 2 直線 $\ell_i(x,y)=0\ (i=1,2)$ の交点がガロワ点かどうか、という問題を考えることと同値である。

例えば、 $f(x,y)=y^2-(4x^3+ax+b)$ で定義される楕円関数体 $k(x,y)$ のときは、$j=0$ すなわち、$y^2=4x^3+1$ のときだけ、上記で定義されるガロワ拡大が存在し、$j\neq 0$ のときは存在しない。実際ガロワ拡大になるのは、$\ell_1=1,\ \ell_2=y$ または $\ell_1=x,\ \ell_2=y\pm\sqrt{-3}$ である。この問題を純代数的に解くことは難しそうである。

上の例では、ℓ_i の次数は 1 であったが、次数が大きくなると困難が増す。例えば、$\{1,\ x,\ y,\ x^2\}$ の k 上の 1 次結合のとき、すなわち、$\ell(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3x^2$ のときはどうであろうか？このときは、不思議なことに、どのような j の値に対してもガロワ拡大となる $\{a_i\}$ を見つけることができ、しかもそのような組み合わせは $j\neq 12^3$ のとき 6 個で、$j=12^3$ のとき 14 個である。さらにガロワ群は Klein 4 元群である ($j=12^3$ のときは 4 次巡回群が加わる) 。これを具体的に表してみよう。

$$y^2=4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3),\quad c_i=e_je_k+e_i^2,\quad \{i,j,k\}=\{1,2,3\}$$

と表すとき、$t=\dfrac{x^2+c_i}{x-e_i}$ または $\dfrac{y}{c_k+2e_kx-x^2}\ (1\leq i<j<3,\ (k-i)(k-j)\neq 0)$ とすると[3]、$k(x,y)/k(t)$ はガロワ拡大で、しかもガロワ拡大になるのは、このようなときに限る[4]。上で $\ell_i(X_0,X_1,X_2,X_3)=0$ とすれば、これは射影空間内の平面で $\ell_1=\ell_2=0$ は直線である。このような 6 本の直線は四面体の辺を構成している。

上の場合は、ガロワ直線、あるいは 4 次のガロワ埋め込みの問題ともいえる。では 5 次のときはどうであろうか？すなわち、$\{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy\}$ の 1 次結合で考えるときである。実はこのときは、幾何学的考察により、存在しないことが簡単にわかる。そこで 6 次のガロワ埋め込みを考える。代数学的には $\{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ x^3\}$ の 1 次結合で表される分数式によって得られるガロワ拡大があるかどうか、あったときどのようなものか？という問題である[5]。さらに、ガロワ部分空間の配置の様子を調べることも興味深い。

---

[1]以下標数 0 で 3 次以上の拡大のときだけ考える。

[2]正確には $x=X/Z,\ y=Y/Z$ としたとき、X,Y,Z の斉次 1 次式

[3]$\wp$-関数への自己同型の作用を計算する。

[4]$j=12^3$ で巡回群のときはこのように不変体を表すのは非常に計算が複雑

[5]そんなことしてどんな意味があるの？というのがもっと問題かも。