研究紹介 (吉原 久夫)

研究テーマ: 代数多様体のガロワ埋め込みの研究

1 代数多様体

代数多様体とは, 多項式を零にする点の集合のつくる図形のことです。高等学校までで学ぶ数学で扱うものとしては、直線、円、放物線、楕円、双曲線あるいは平面、球面などあります。ただし、$y = \sin x$ のグラフは違います。これは多項式 $f(x, y) = 0$ で表すことはできません（なぜでしょう？）。上の図形を表す多項式の次数は 1 か 2 ですが、3 以上のものを中心に扱います。一方、方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ は実数だけ考えていたのでは解は見つかりませんが、複素数まで考察の範囲を拡げると 2 個の解が見つかります。同様に、空集合とされていた ”虚円 ” $x^2 + y^2 = -1$ も複素数まで考えると図形があることがわかります。また双曲線 $xy = 1$ は別々の 2 本の曲線ですが、実は無限遠までも考えると、つながった 1 本の曲線であることもわかります。すなわち、

(1) 零にする点は複素数まで考える。

(2) 無限遠点まで考察の対象とする。

このようにして、円、放物線、楕円、双曲線、虚円も同一の対象物であることがわかるのです。つまり、例外のない**調和**と**統一**のとれた世界が実現します。さらに、曲線をあたえる多項式の次数を大きくすると、複雑な図形が現れますが、そのときにもやはり統一的な美しさを感じさせる原理が見つかります。例えば、次数を 3 にしただけで、いわゆる楕円曲線、楕円とは違います！(複素数で考えると) ドーナッツの表面みたいなものです、となることがわかり、これは数学のさまざまな分野に応用されています。上の例は曲線ですが、もっと一般に変数の多い多項式がいくつかあるとき共通に零になる点集合を考え、これを代数多様体といいます。式で表してみると、K を四則演算が自由に出来る集合（例えば、複素数全体）として、

$$\{\ (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\ \}.$$

が代数多様体です。代数幾何学を初心者向けに解説した本をあげます、ご覧になってみるといいでしょう。[1, 2, 3]。

2　ガロワ点とは？

高校数学では適切な例が見つからないので、誤解を恐れずある程度雰囲気を表している例をあげてみます。

例

空間に立方体があるとする。これを少し離れた地点から（片目で）眺める。平面図形として見えるが、たいていの地点では特別な多角形とは見えない。しかし、ある特別な地点では正六角形として、あるいは正方形として見える地点がある。すなわちこの図形の重心を中心にして回転したり、折り返したりしても元の図形に重なることがある。このような図形は対称性があるという。対称性があるように見える地点を**ガロワ点**ということにする。どの程度対称性があるかは、またガロワ点によって違ってくる。おおざっぱに言って、正六角形は 60 度ずつの回転と折り返しで 12 個、正方形は 90 度ずつの回転と折り返しで 8 個と数える。
では対称性の見つからない点、すなわちガロワ点でないとき、どうするか？目を移動して、ガロワ点を探すことでもよい。そしてどのくらいガロワ点があるか、その分布を調べるのも面白そうだ。
一方、目の位置はそのままで、今度は立方体自体を改変することを考える。すなわち、立方体に面を付け加えて別の多面体（どんな立体になるか不明だが）を作り、元の地点から眺めると対称性のある平面図形に見えるようにできる。しかも、もっとも少ない手順でできたとき、この操作を**ガロワ閉包**をとるという。

もう少し正確に例をあげてみよう。やや難しくなるが、曲線 $y^2 = x^3 + 1$ の上の点 (x, y) に対して、y を対応させるとき、（このとき目の位置は無限遠点である）、y にいろいろな値 a を与えると、$a \neq 0$ なら x は 3 個決まる。このとき、$3:1$ の対応という。x の一つを b とすると、他の 2 つは $b\omega,\ b\omega^2$ と表せる。ただし、$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ である。 すなわち ω を掛けても（これは 120 度の回転）やはり曲線の上の点である。これは対称性がある (群は Z_3) といえる。目の位置を移動すると、もはやガロワ点でなくなる。そこでガロワ閉包はどうなるかというと、さらにに難しくなるが、この曲線の上に $2:1$ に存在する曲線で 6 個の対称性をもつもの (群は S_3) が見つかる。更に詳しくは添付の power point をご覧下さい。

3　ガロワ埋め込み

複素数は 1 個で（普通の意味の） 2 次元ある。なので、（上記の場合）曲線とは曲面のことである。（なんだか禅問答みたいですね。）楕円曲線 $y^2 = x^3 + px + q$ は平面（ 4 次元空間）の中にありますが、このときは、ガロワ点があるのは上の

例の場合だけで、対称性（群という）はどれも 3 個の要素からなるものだけ。またガロワ点は 3 個みつかることがわかります。しかし、もっと高い次元の空間に存在するようにする（埋め込むという）ことができ、そうすることでガロワ点に相当する部分空間を沢山見つけることが出来、群もいろいろ複雑なものが見いだせることがある。つまり、次元の高い空間に存在するようにすることで、対称性が増えるようにできるわけです。

このようなことをより次元の高い図形（代数多様体）にも行う。図形の持っている幾何学的性質と、図形の上に存在する関数やそれらのの作る集合（体という）や対称性を表す群の間に深くて不思議な関係を見いだせることがあります。

4 ガロワ埋め込み、専門家向け

基礎体 k は代数閉体とする（必要に応じて標数の条件を付ける）。 n 次元非特異射影代数多様体 V と，その上の very ample divisor D の組 $(V,\ D)$ に対して，完備 1 次系 $|D|$ に付随した埋め込み $f : V \hookrightarrow \mathbb{P}^N := \mathrm{Proj}\ \mathrm{H}^0(V,\ \mathcal{O}(D))$ を考える。W を $\mathbb{P}^{\mathrm{N}}$ の $N{-}n{-}1$ 次元線形多様体で，$f(V)$ との交わりはないとする。このとき，W 中心の射影を p とすると，$\pi = p \cdot f : V \longrightarrow \mathbb{P}^n$ は全射正則写像となる。$k(V)$ を V の有理関数体とすると，π は関数体の有限次拡大 $k(V)/\pi^*k(\mathbb{P}^{\mathrm{n}})$ を惹き起こす。この拡大は W によってきまるので $k(V)$ の $\pi^*k(\mathbb{P}^n)$ 上のガロワ閉包を K_W として，ガロワ群 $G_W = \mathrm{Gal}(K_W/\pi^*k(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}))$ を $f(V)$ の W でのガロワ群という。これは分岐被覆 $\pi : V \longrightarrow \mathbb{P}^{\mathrm{n}}$ から定義されるモノドロミー群とも一致する。特に，拡大 $k(V)/\pi^*k(\mathbb{P}^{\mathrm{n}})$ がガロワ拡大のとき，W をガロワ部分空間といい，このような部分空間が存在するような埋め込みをガロワ埋め込みという。また，V_W は正規射影多様体で K_W を関数体にもち，$V_W \longrightarrow V$ が有限射になるものを $\pi : V \longrightarrow \mathbb{P}^{\mathrm{n}}$ の Galois closure variety という。このとき以下の基本的問題がある。

(1) V のガロワ埋め込みを与える因子 D が存在するための条件は何か。また、V に対して線形同値を法としてどのくらいガロワ埋め込みをもつ因子 D が存在するか。

(2) 埋め込まれた $f(V)$ に対して，どのくらいガロワ部分空間 W が存在するか。

(3) ガロワ埋め込みのとき、G_W の $PGL(N, k)$ への表現を求める。特に、抽象群としての G_W の構造を決定する。

(4) ガロワ埋め込みのとき、ガロワ対応を考察する。すなわち G_W の部分群にどのような多様体が対応するか調べる。

(5) W がガロワ部分空間でないとき、群 G_W および Galois closure variety の構造を調べる。

(6) W と W' が（Grassmann 多様体の中で）近くにあるとき，K_W と $K_{W'}$ は同型にならないか。

結局のところ、コホモロジー群 $\mathrm{H}^0(V, \mathcal{O}(D))$ の部分空間の解析がポイントとなる。さて、これまでの主な成果

$N=2,\ n=1$ すなわち V が曲線で射影平面に埋め込まれているときは、すでに多くの結果があり，上記の問題 (1) $\sim$ (6) はほぼ解決している（実はこの一連の研究が現在の研究に発展した）。これには主に日本の研究者が貢献している [6]。また曲線が一般次元射影空間に埋め込まれているときは，まだ研究は始まったばかりであるが，筆者やイタリアの数人の研究者により進展しつつある [5]。また，ほぼ同じ発想から V が一般次元だが，射影空間に超曲面として埋め込まれているときも，成果がある [7]。一方 G_W は被覆 $V \longrightarrow \mathbb{P}^n$ のモノドロミー群と同型であることも証明されており，位相幾何学的方向からの研究もある [4]。以上は多様体が射影空間内に存在しているときの研究である。これらを踏まえた intrinsic な定義が上に述べたものである。この研究方法によれば，これまでの成果を一般化するばかりでなく，より広い視野からの成果も期待できる。実際，$n=2$ のときの、アーベル曲面に対しての結果が，[8] である。ガロワ埋め込みをもつアーベル曲面について上記 (3) の複素表現の群構造は完全に決定され，アーベル曲面の構造も楕円曲線 E の積 $E \times E$ に同種ということなど判明し，従来のアーベル曲面の理論とは視点の異なった方向からの新しい成果が得られている。最近の成果の一つに、楕円曲線を 4 次の因子で $\mathbb{P}^3$ に埋め込むと、すべての楕円曲線に対して、Galois line が存在して、そのガロワ群は $Z_2 \oplus Z_2$ で、Galois lines の配置は四面体の辺を作る 6 本の lines になることがある [9]。

5　おわりに

ガロワ埋め込みに関しての概説および未解決問題集が
http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/ yosihara/openquestion.html
にあります。

参考文献

[1] 海老原　円: 14 日でわかる代数幾何学事始, サイエンス社, 2300.

[2] M リード、若林訳: 初等代数幾何講義, 岩波書店.

[3] 上野健爾: 代数幾何入門, 岩波書店.

[4] J. Harris, Galois group of enumerative problems, Duke Mat. J., **46** (1979), 685–724.

[5] G. P. Pirola and E. Schlesinger, Monodromy of projective curves, J. Algebraic Geometry, **14** (2006), 623–642.

[6] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra, **239** (2001), 340–355.

[7] ———, Galois points for smooth hypersurfaces, J. Algebra, **264** (2003), 520–534.

[8] ———, Galois embedding of algebraic variety and its application to abelian surface, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **117** (2007), 69–85.

[9] ———, Galois lines for normal elliptic space curves II, Algebra Colloquium (to appear).