Galois point, Galois line . . . Galois embedding

新潟大理　吉原久夫

2013.03.28

1. 初めに

ガロワ点の概念に至った経緯とその後の展開の概略を述べます。参考文献や未解決問題集はウェブページ:http://hyoshihara.web.fc2.com.jp/ にあります。

以下基礎体 k は標数 $p=0$ の代数閉体とする。実は平面曲線で $p>0$ のとき、豊富な結果があり面白いのであるが、筆者の力不足で述べることができません。深澤氏らによる詳細な結果がある（[12] など）ので、上記のページでご覧ください。

2. degree of irrationality

まず経緯をのべる。超越拡大 K/k の分類をすることを考えた。代数拡大に比べ、超越拡大はその研究手段も少なくあまり研究されていないようであった。そこで、まずその手段を考える必要があった。考察の基礎におく体は何か？純超越拡大が適当であろう。その代数拡大として一般の超越拡大が得られる。簡単のため、K は k 上有限生成とする、このとき超越基 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ が存在して $[K:k(x_1,\ldots,x_n)]$ は有限次拡大になる。しかし、この次数は一定ではなく、いくらでも大きい値を取りうる。そこで、その最小値を $d_r(K)$ と表して、K/k の非有理次数[1]という。これは k 上の双有理普遍量である。定義は単純であるが、$d_r(K)$ の決定は一般に非常に難しい[2] [49, 51]。非有理次数を与えている純超越拡大を $K_m=k(x_1,\ldots,x_n)$ とするとき、いくつかの問題が生じる：

(1) いつ K/K_m はガロワ拡大か？
(2) K/K_m のガロワ閉包 L はどういう体か？
(3) ガロワ群 $\mathrm{Gal}(L/K_m)$ はどのような群か？

ところが K のモデルとして非特異射影平面代数曲線 C がとれるときは次の結果が知られている。

Theorem 1. C の次数を $d\ (\geq 3)$ とするとき、$d_r(C):=d_r(K)=d-1$ であり、非有理次数を与える拡大は $P\in C$ 中心の射影 $\pi_P:\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ からひきおこされる。すなわち $(\pi_P|_C)^*: k(\mathbb{P}^1)\hookrightarrow k(C)$ として与えられる.

3. Galois point

Theorem 1 により、考察の順を逆転する。点 P からの射影 π_P、つまり点射影を出発点として考察する。P が C の上にないときも射影から体の拡大がひきおこされ、このときは拡大の次数は d である。なお、$(\pi_P|_C)^*(k(\mathbb{P}^1))$ はやはり $k(C)$ の maximal rational subfield である。すなわち、$k(C)$ と $(\pi_P|_C)^*(k(\mathbb{P}^1))$ の間には有理的関数体は存在しない。以降、埋め込みが明確なときは $(\pi_P|_C)^*$ は省略する。これらの結果により、§2 の目的を幾何学で達成できることになり、自然に Galois 点の概念に至る。記法は上記のとおりであるとする。

Definition 1. [35, 52] L_P を $k(C)/k(\mathbb{P}^1)$ のガロワ閉包とするとき、群 $G_P:=\mathrm{Gal}(L_P/K_P)$ を P でのガロワ群という[3]。特に、$k(C)/k(\mathbb{P}^1)$ がガロワ拡大のとき、P をガロワ点 (=GP for short) という。また、L_P の非特異モデル C_P の種数のことを P での種数といい $g(P)$ と表す。

このとき以下の問題が生じる。

[1]曲線、すなわち 1 変数代数関数体のときは gonality とよばれている。
[2]例えば、2 つの楕円曲線の積 $E_1\times E_2$ の非有理次数はいつ 3 でいつ 4 なのか？
[3]これは被覆 $C\longrightarrow\mathbb{P}^1$ の monodromy group と一致する [20]。

Problem 1. 非特異射影平面代数曲線 C が与えられたとき、

(1) すべての点 $P \in \mathbb{P}^2$ に対して、ガロワ群 G_P を決定せよ。
(2) GP の分布を求めよ。特に、その個数を求めよ。
(3) P での種数を求めよ。
(4) L_p と K_P の中間体を決定せよ。
(5) P が C の一般的な点とするとき、$\{\, C_P \mid P \in C\}$ の *closure* を S とする。このとき、$f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の *singular fiber* を求め、S の構造を決定せよ。

P が GP のとき、G_P は C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群となり、C が非特異なので $d \geq 4$ のとき、射影変換に拡張される。したがって、 $G_P \subset \mathrm{PGL}(3,k)$ となる。このことにより、G_P は巡回群となることがわかる。しかし、C が特異点を持つとき、G_P の決定は難しく、$\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ にすら含まれないこともある [60]。また、$p > 0$ のとき、C が非特異でも G_P はかなり複雑である [12]。

与えられた C に対してすべての点 P での群 G_P の決定も、特別な曲線でないと困難である。自己双対のときは、比較的簡単に決定できる [21]。また、ガロワ閉包曲線と fiber space $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ もいくつかの C に対しては求まっている [55, 41, 42]。

平面曲線に関するガロワ点の概念はそのまま超曲面に対して拡張される [53, 54, 19]。

4. Galois line

射影多様体の余次元が 2 のときは、射影の中心は直線を考えることになる。このときも §3 と同様な定義ができて、ガロワ点に相当する射影の中心はガロワ直線 (Glois line) と呼ぶ。そして点射影のときと同様の問題が生じる。ただし、多様体の自己同型が射影空間の自己同型に拡張されるための条件を加える必要がある。この場合の研究は $\mathbb{P}^3$ の射影曲線 C についていくつかの成果が得られている [56]。

以下 C は $\mathbb{P}^3$ 内の d 次 smooth, irreducible, non-degenerate and linearly normal curve とする。

Theorem 2. C がガロワ直線 ℓ をもつとすると、ガロワ群 G_ℓ の射影表現 $PGL(4,k)$ があり、次の群の完全列

$$1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow G_2 \longrightarrow 1,$$

がある。ここで、G_1 は巡回群で、 G_2 は $PGL(3,k)$ の部分群である。

このことなどにより次の主張がわかる：

Theorem 3. $g(C) \geq 1$ ならガロワ直線は高々有限個である。

Theorem 4. d が素数 (≥ 5) ならガロワ直線の数は高々 1 本である。

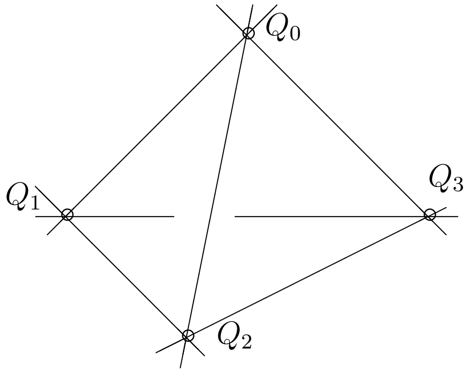
各論もいくつかあるが、もっとも印象的な結果を述べると [63]：

Theorem 5. $\mathbb{P}^3$ 内の各 *linearly normal elliptic curve* C に対して, V_4-*lines*[4] は 6 本あり、それらは四面体の 6 個の辺をなす。C の *Weierstrass normal form* が $y^2 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$ なら、4 個の頂点の座標 Q_i は、適当な座標系を採れば, 次のように与えられる：

$$Q_0 = (0:0:0:1) \text{ and } Q_i = (1 : -c_i : e_i : 0),\ (i = 1,2,3),$$

ここで、$c_i = {e_i}^2 + e_j e_k$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ である。

[4]ガロワ直線でその群が Klein's four group のもののことである。



5. Galois embedding

これまでは射影空間に埋め込まれている代数多様体に対して考察した。より一般に埋め込まれているとは限らない多様体に考察を一般化する。

非特異代数多様体 V とその上の very ample divisor D に対して $|D|$ に付随した射影埋め込みを $f = f_D : V \hookrightarrow \mathbb{P}^N$、$N+! = \dim \mathrm{H}^0(V,\ \mathcal{O}(D))$ とする。W を $\mathbb{P}^N$ の $N-n-1$ 次元の 1 次部分多様体で $f(V) \cap W = \emptyset$ とする。このとき、W 中心の射影 $\pi_W : \mathbb{P}^N \dashrightarrow$ dual of $W = W_0$ を考えると、合成 $\pi = \pi_W \cdot f$ は surjective morphism $f : V \longrightarrow W_0$ となる。この被覆 f について上記と同様の考察をする。被覆 π は体の有限次拡大 $\pi^* : K_0 := k(W_0) \hookrightarrow \mathbb{K} = k(V)$ をひきおこす。この次数は $d = \deg f(V) = D^n$ である。K_W をこの拡大のガロワ閉包とし、$G_W = Gal(K_W/K_0)$ とする。

Definition 2. G_W を W でのガロワ群という。もし、拡大 K/K_0 がガロワ拡大なら f はガロワ埋め込みといい、W はこの埋め込みのガロワ部分多様体という。

Definition 3. 非特異射影多様体 V に対して、very ample divisor D で $|D|$ に付随した埋め込みがガロワ部分多様体をもつとき、V はガロワ埋め込みをもつという。

例えば、楕円曲線 E の 3 次の因子による埋め込みでは、$j(E) = 0$ のときだけ、ガロワ点が存在して、その個数は 3 である。しかし 4 次の場合は状況が一変する。§4 の空間楕円曲線は 4 次の因子によるガロワ埋め込みの例になっている。どのような 4 次の埋め込みも（ $j(E) \neq 1728$ のときは）、 ガロワ直線が 6 本存在するのである　（$j(E) = 1728$ のときは V_4, Z_4 直線合わせて 14 本存在する）。その根拠は, $z \mapsto -z,\ z \mapsto z + \alpha,\ 2\alpha \equiv 0$ という自己同型が存在することによる。しかし、5 次の因子は決してガロワ埋め込みをもたない。位数 5 の自己同型で固定点をもつものが存在しないからである。これは一つの多様体が因子によってはガロワ埋め込みになったり、ならなかったりする例である。ところが、$\mathrm{Aut}(V)$ が小さい多様体、たとえば $\mathrm{Aut}(V)$ が単位元しかないものは、どのような因子によってもガロワ埋め込みをもたない。

もっとも基本的な定理は

Theorem 6. W をガロワ部分多様体とするとき、G_W は $\mathrm{Bir}(V/W_0)$ の部分群となり、さらに、$\mathrm{Aut}(V)$ の部分群にもなる。すなわち、表現 $\alpha : G_W \hookrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ がある。

(V, D) がガロワ埋め込みを与えているとき、D' を W を含む $f(V)$ の超平面切断とすると、D と D' は線形同値になり、このことより

Theorem 7. 射影表現 $\beta : G_W \hookrightarrow PGL(N+1, k)$ がある。

このことにより、G_W が見やすいものとなる。アーベル曲面についてガロワ埋め込みの可能性も調べられている、詳しくは [57] を参照のこと。

6. References

本文に引用がないものでも、関係のありそうなものはあげておく。ただし、網羅されているわけではない。

References

1. F. Cukierman, Monodromy of projections, *Mat. Contemp.*, **16** 15th School of Algebra (Portuguese) (1999), 9–30.
2. C. Duyaguit and K. Miura, On the number of Galois points for plane curves of prime degree, *Nihonkai Math. J.*, **14** (2003), 55–59.
3. C. Duyaguit and H. Yoshihara, Galois lines for normal elliptic space curves, *Algebra Colloquium*, **12** (2005), 205–212.
4. S. Fukasawa, Galois points on quartic curves in characteristic 3, *Nihonkai Math. J.*, **17** (2006), 103–110
5. ———, On the number of Galois points for a plane curve in positive characteristic, *Comm. Algebra*, **36** (2008), 29–36.
6. ———, On the number of Galois points for a plane curve in positive characteristic, II, *Geom. Dedicata*, **127** (2007), 131–137.
7. ———, Classification of plane curves with infinitely many Galois points, *J. Math. Soc. Japan*, **63** (2011), 195–209.
8. ———, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, *Geom. Dedicata*, **139** (2009), 211–218.
9. ———, On the number of Galois points for a plane curve in positive characteristic, III, *Geom. Dedicata*, **146** (2010), 9–20.
10. ———, Galois points for a non-reflexive plane curve of low degree, *Finite Fields Appl.*, **23** (2013), 69–79.
11. ———, Galois points for a plane curve in characteristic two, preprint.
12. ———, Complete determination of the number of Galois points for a smooth plane curve, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, to appear.
13. ———, Characterization of a Hermitian curve by Galois point, preprint, arXiv:1108.5823(math.AG).
14. ———, Hypersurfaces with infinitely many Galois points, preprint, arXiv:1206.6939(math.AG).
15. ———, A family of plane curves with at least two Galois points in positive characteristic, preprint.
16. S. Fukasawa and T. Hasegawa, Singular plane curves with infinitely many Galois points, *J. Algebra*, **323** (2010), 10–13.
17. S. Fukasawa, M. Homma and S. J. Kim, Rational curves with many rational points over a finite field, Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding Theory, 37–48, *Contemp. Math.*, **574**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
18. S. Fukasawa and K. Miura, Galois points for a plane curve and its dual curve, preprint.
19. S. Fukasawa and T. Takahashi, Galois points for a normal hypersurface, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
20. J. Harris, Galois groups of enumerative problems, *Duke Math. J.*, **46** (1979), 685–724.
21. H. Hayashi and H. Yoshihara, Galois group at each point for some self-dual curves, *Geometry*, **2013** (2013), Article ID 369420, 6 pages.
22. M. Homma, Galois points for a Hermitian curve, *Comm. Algebra*, **34** (2006), 4503–4511.
23. ———, The Galois group of a projection of a Hermitian curve, *Int. J. Algebra*, **1** (2007), 563–585.
24. H. Kaji, The separability of the Gauss map versus the reflexivity, *Geom. Dedicata*, **139** (2009), 75–82.
25. M. Kanazawa, T. Takahashi and H. Yoshihara, The group generated by automorphisms belonging to Galois points of the quartic surface, *Nihonkai Math. J.*, **12** (2001), 89–99.
26. M. Kanazawa and H. Yoshihara, Galois group at Galois point for genus-one curve, *Int. J. Algebra*, **5** (2011), 1161–1174.
27. S. L. Kleiman, Multiple tangents of smooth plane curves (after Kaji), Algebraic geometry: Sundance 1988, 71–84, *Contemp. Math.* **116**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
28. K. Miura, Field theory for function fields of singular plane quartic curves, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **62** (2000), 193–204.
29. ———, Field theory for function fields of plane quintic curves, *Algebra Colloquium*, **9** (2002), 303–312.
30. ———, Galois points on singular plane quartic curves, *J. Algebra*, **287** (2005), 283–293.
31. ———, Galois points for plane curves and Cremona transformations, *J. Algebra*, **320** (2008), 987–995.
32. ———, On dihedral Galois coverings arising from Lissajous's curves, *J. Geometry*, **91** (2009), 63–72.
33. ———, A note on birational transformations belonging to Galois points, *Beitr. Algebra Geom.*, to appear.
34. K. Miura, A. Ohbuchi and T. Takahashi, Automorphisms of a nonsingular curve on a rational surface of Picard number three, *Far East J. Math. Sci.*, **47** (2010), 109–119.
35. K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, *J. Algebra*, **226** (2000), 283–294.
36. ———, Field theory for the function field of the quintic Fermat curves, *Comm. Algebra*, **28** (2000), 1979–1988.
37. G.P. Pirola and E. Schlesinger, Monodromy of Projective Curves, *J. Algebraic Geom.*, **14** (2005), 623–642.

38. J. Rathmann, The uniform position principle for curves in characteristic p, *Math. Ann.*, **276** (1987), 565–579.
39. H. Sakai, Infinitesimal deformation of Galois covering space and its application to Galois closure curve, *Nihonkai Math. J.*, **14** (2003), 133–177.
40. ———, Total spaces of families of Galois closure curves, preprint.
41. T. Shirane, Families of Galois closure curves for plane quintic curves, *J. Algebra*, **342** (2011), 175–196.
42. ———, Certain $\mathcal{S}_5$-covers over smooth surfaces and Families of Galois closure curves for plane sextic curves, to appear.
43. T. Takahashi, Minimal splitting surface determined by a projection of a smooth quartic surface, *Algebra Colloquium*, **9** (2002), 107–115.
44. ———, Galois points on normal quartic surfaces, *Osaka J. Math.*, **16** (2002), 647–663.
45. ———, Non-smooth Galois points on a quintic curve with one singular point, *Nihonkai Math. J.*, **16** (2005), 57–66.
46. ———, Galois morphism computing the gonality of a curve on a Hirzebruch surface, *J. Pure Appl. Algebra*, **216** (2012), 12–19.
47. ———, Galois point for a plane curve with one or two singular points, in preparation.
48. H. Tokunaga, Triple coverings of algebraic surfaces according to the Cardano formula, *J. Math. Kyoto Univ.*, **31** (1991), 359–375.
49. H. Tokunaga and H. Yoshihara, Degree of irrationality of abelian surfaces, *J. Algebra*, **174** (1995), 1111–1121.
50. S. Watanabe, The genera of Galois closure curves for plane quartic curves, *Hiroshima Math. J.*, **38** (2008), 125–134.
51. H. Yoshihara, Degree of irrationality of hyperelliptic surfaces, *Algebra Colloquium*, **7** (2000), 319–328.
52. ———, Function field theory of plane curves by dual curves, *J. Algebra*, **239** (2001), 340–355.
53. ———, Galois points on quartic surfaces, *J. Math. Soc. Japan*, **53** (2001), 731–743.
54. ———, Galois points for smooth hypersurfaces, *J. Algebra*, **264** (2003), 520–534.
55. ———, Families of Galois closure curves for plane quartic curves, *J. Math. Kyoto Univ.*, **43** (2003), 651–659.
56. ———, Galois lines for space curves, *Algebra Colloquium*, **13** (2006), 455–469
57. ———, Galois embedding of algebraic variety and its application to abelian surface, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **117** (2007), 69–86
58. ———, Galois points for plane rational curves, *Far east J. Math.*, **25** (2007), 273–284
59. ———, Errata to "Galois points for plane rational curves", *Far east J. Math.*, **29** (2008), 209–212
60. ———, Rational curve with Galois point and extendable Galois automorphism, *J. Algebra*, **321** (2009), 1463–1472.
61. ———, A note on minimal Galois embedding of abelian surface, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **126** (2011), 1–9.
62. ———, Rational cuspidal curve with a Galois point, *Math. Nachr*, **284** (2011), 1583–1587.
63. ———, Galois lines for normal elliptic space curves, II, *Algebra Colloquium* **19** (2012) no. spec 01, 867–876.
64. ———, A relation between Galois automorphism and curve singularity, *JP Journal of Alg. Number theory and Applications*, **20** (2011) 213–223.
65. ———, Galois embeddings of $K3$ surfaces –abelian case–, arXiv:1104.1674(math.AG).
66. ———, Non-existence of Galois covering of smooth rational surface by bielliptic surface, to appear
67. ———, Sextic variety as Galois closure variety of smooth cubic, *Affine Algebraic Geometry, Proceedings of the Cinference, Osaka, Japan 3 –6 March 2011* World Scientific 300 – 313