Galois points for a smooth plane curve in characteristic p

深澤 知（山形大学理学部）

1. はじめに

本稿は, 2011 年 11 月 3 日から 5 日まで高知大学理学部で開催された集会「射影多様体の幾何とその周辺 2011」における著者の研究報告である. 講演では「正標数において, 非特異平面曲線に対するガロア点の個数はいくつか？」という問題に対する完全な解答を与えたことを報告した. また, 特異平面曲線を含めた研究の現状を紹介し, いくつかの今後の課題を説明した. 本稿ではそれらと, 講演では述べきれなかった主定理の証明の概要についても述べる.

2. ガロア点

K を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とし, $C \subset \mathbb{P}^2$ を次数 $d \geq 4$ の既約平面代数曲線とする[1]. 曲線 C の特異点集合を $\mathrm{Sing}(C)$ で表し, 関数体を $K(C)$ で表す. 平面 $\mathbb{P}^2$ 内の 2 点 $P \neq Q$ を通る直線を $\overline{PQ}$ とかく. $P \in \mathbb{P}^2$ を点とする. このとき, 点射影 (とよばれる有理写像)

$$\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1; Q \mapsto \overline{PQ}$$

を考えることができる. ($\mathbb{P}^2$ 内の 1 点 P を通る直線全体の集合は射影直線 $\mathbb{P}^1$ と一対一対応が付くことに注意.) この射影により, 関数体の拡大

$$K(C)/\pi_P^* K(\mathbb{P}^1)$$

を得る. この拡大は有限次代数拡大である. 吉原久夫氏は次の定義を与えた.

定義 (吉原久夫, 1996 ([5, 19, 24])[2])**.** 関数体の拡大 $K(C)/\pi_P^* K(\mathbb{P}^1)$ がガロアであるとき, P を C の**ガロア点**という.

点 P がガロア点のとき, G_P でそのガロア群 $\mathrm{Gal}(K(C)/\pi_P^* K(\mathbb{P}^1))$ を表す.

射影の計算方法について簡単に復習しよう. 点 $P \in \mathbb{P}^2$ が 2 枚の一次方程式 $aX + bY + cZ = dX + eY + fZ = 0$ で定義されているとき, 射影は

$$\pi_P(X : Y : Z) = (aX + bY + cZ : dX + eY + fZ)$$

と与えられる. この有理写像は P の定義連立方程式に依存するが, 部分体 $\pi_P^* K(\mathbb{P}^1) \subset K(C)$ は定義連立方程式に依存しないことに注意する. $P = (1 : 0 : 0)$ であれば, $\pi_P = (Y : Z)$ と書ける. C の定義式を $F(X, Y, Z) = 0$ とし, $f(x, y) = F(x, y, 1)$ とする. このとき $Z = 1$ とすれば π_P によって得られる関数体の拡大は $K(x, y)/K(y)$ であり, その関係式は $f(x, y) = 0$ で与えられる.

これらを踏まえると次の例を観察できる.

本研究は, 日本学術振興会科学研究費補助金・若手研究 (B) (22740001) の援助を受けている.

[1]次数 $d = 3$ のとき, C 上の点からの射影の次数は 2 となるので (分離的なら) どの点から射影してもガロア拡大を与えるため, 本稿の問題は自明となる. $\mathbb{P}^2 \setminus C$ の点からの射影を考えることにはそれでも意味があるが, 混乱をさける.

[2]2011 年はガロア生誕 200 周年であり, ガロア点生誕 15 周年である.

例 1. 標数 $p \neq 2,3$ とし, 次の式で定義される曲線 C を考える:

$$X^3Z + Y^4 + Z^4 = 0.$$

このとき, $P_1 = (1:0:0) \in C$, $P_2 = (0:1:0) \in \mathbb{P}^2 \setminus C$ は共にガロア点である. P_1 でのガロア群 G_{P_1} は位数 3 の, P_2 でのガロア群 G_{P_2} は位数 4 の巡回群である.

正標数においては次の例が考えられる.

例 2. 標数 $p \geq 3$ とし, 次の式で定義される曲線 H を考える:

$$X^pZ + XZ^p - Y^{p+1} = 0.$$

このとき, $P_1 = (1:0:0) \in H$, $P_2 = (0:1:0) \in \mathbb{P}^2 \setminus H$ は共にガロア点である. 特に π_{P_1} はアルティン・シュライヤー拡大を与える.

自然と次の問題に誘導される[3].

基本問題. 平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ に対し, ガロア点の個数はいくつか？

次のように記号を準備する.

- $r : \hat{C} \to C$ は C の正規化を表す.
- $\hat{\pi}_P$ は点 $P \in \mathbb{P}^2$ からの射影 $\pi_P : C \to \mathbb{P}^1$ と r との合成 $\pi_P \circ r$ とする.
- $T_QC \subset \mathbb{P}^2$ は点 $Q \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ での (射影) 接線を表す.
- $I_Q(C,l)$ は C と直線 $l \subset \mathbb{P}^2$ の 点 $Q \in C \cap l$ での交わりの重複度を表す.
- $\delta(C) := \sharp\{P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C) \mid P$ は C のガロア点$\}$.
- $\delta'(C) := \sharp\{P \in \mathbb{P}^2 \setminus C \mid P$ は C のガロア点$\}$.

3. ガロア点の分布のあり方

写像 $\hat{\pi}_P : \hat{C} \to \mathbb{P}^1$ の点 $Q \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ での分岐指数を e_Q で表すことにする. 分岐について次のことがわかる.

事実 1. $P \in \mathbb{P}^2 \setminus \mathrm{Sing}(C)$, $Q \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ とする. 写像 $\hat{\pi}_P$ について次が成立する.

(1) $P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C) \Rightarrow e_P = I_P(C, T_PC) - 1$.
(2) $P \neq Q \Rightarrow e_Q = I_Q(C, \overline{PQ})$.

このことから, P と異なる点 $Q \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ について

$$e_Q \geq 2 \Leftrightarrow \overline{PQ} = T_QC$$

となる.

ここで, π_P が非分離となるときを注意しておく. このとき, すべての点 $Q \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ に対して, $e_Q \geq 2$ が満たされる. 即ち, 上で考察したことから,

$$\pi_P \text{ が非分離} \Leftrightarrow \overline{PQ} = T_QC \text{ for } \forall Q \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$$

[3]ガロア点に付随した問題はこれだけではなく, 多岐にわたる [19, 24, 26, 27]. しかしながらこれをメインに話を進める.

が成立する[4]. 簡単な考察により, このような点は 1 点しか存在しないことがわかり, しかもどこにあるかすぐに特定できる. 従ってガロア点を探す際, 射影の分離性についてはほとんど気にしなくて良い.

さらに曲線のガロア被覆について次がある.

事実 2 ([21], III. 7.2, 8.2)**.** $\theta : C \to C'$ を非特異曲線の間の次数 d のガロア被覆とし, そのガロア群を G とする. このとき, 次が成立する.

(1) $\forall P \in C, \forall \sigma \in G, \theta(\sigma(P)) = \theta(P)$.
(2) $\theta(P) = \theta(Q) \Rightarrow \exists \sigma \in G$ s.t. $\sigma(P) = Q$.
(3) 任意の点 $P \in C$ に対して, P でのスタビライザー群 $G(P) := \{\sigma \in G | \sigma(P) = P\}$ の位数は分岐指数 e_P に等しい.
(4) $\theta(P) = \theta(Q) \Rightarrow e_P = e_Q$.
(5) 分岐指数 e_P は次数 d を割り切る.

点 P がガロア点のときどのような状況になるか, 上の 2 つを使って説明する. 事実 1 と 2(4) により

$$Q, R \in C \setminus (\mathrm{Sing}(C) \cup \{P\}),\ \overline{PQ} = \overline{PR} \Rightarrow I_Q(C, \overline{PQ}) = I_R(C, \overline{PR})$$

となる. 即ち, $R \in C$ が直線 $\overline{PQ}$ 上にあるとすると, R は Q と同じ重複度で直線 $\overline{PQ}$ と交わらなければならない. π_P が双有理でなければ (フルヴィッツの公式より) 分岐点は必ず存在する. よって標語的に,

ガロア点は多重接線や変曲点での接線たちの交点である

と言える[5]. (ここでは, 接点が 2 つ以上ある接線を多重接線, $I_Q(C, T_Q C) \geq 3$ なる点 $Q \in C$ を変曲点と呼んだ.)

4. 先行結果

標数 $p = 0$ で C が非特異のときには, 基本問題は吉原氏により完全に解決されている. (記号 $\sim$ は射影同値を表すものとする.)

定理 A (吉原 [24])**.** $p = 0$, 曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ は非特異とする. このとき:

(I) $\delta(C) = 0, 1$ or 4.
- $\delta(C) = 4 \Leftrightarrow C \sim X^3 Z + Y^4 + Z^4 = 0$.

(II) $\delta'(C) = 0, 1$ or 3.
- $\delta'(C) = 3 \Leftrightarrow C \sim X^d + Y^d + Z^d = 0$.

標数 $p > 0$ では, 本間正明氏による次の結果がある.

定理 B (本間 [16])**.** $p > 0$, $q > 3$ を p 冪とし, H はエルミート曲線[6] $X^q Z + X Z^q - Y^{q+1} = 0$ とする. (H は $\mathbb{F}_{q^2}$ でフェルマー曲線 $F(q+1)$ に射影同値である.) このとき, $P \in \mathbb{P}^2$ について

$$P : \text{ガロア点} \ \Leftrightarrow P : \mathbb{F}_{q^2}\text{-有理点}$$

である. 特に, $\delta(H) = q^3 + 1,\ \delta'(H) = q^4 - q^3 + q^2$ である.

---

[4] このような点 P をもつ曲線は strange 曲線と呼ばれている [12, IV, Section 3].
[5] このような点が必ずしもガロアになるとは限らないが.
[6] 本来は $\mathbb{F}_{q^2}$ 上で考察する際にそのように呼ぶそうである.

本間氏の結果から, 次数を大きくすればいくらでもガロア点の個数は大きくなるので, 吉原氏の定理は正標数では成立していないことがわかる. 正標数ではどうしてこのようなことが起きるのか？主に次のことが考えられる.

- ガロア点からの射影がワイルドに分岐する点をもつことがある.
- generic order of contact $M(C)$ (6 節参照) が 2 より大きくなることがある.

ワイルドに分岐している点があると分岐点が極端に少なくなることがあり, $M(C) > 2$ だと変曲点の数え上げが変化する. これら 2 つの現象は, 標数零の証明の「ガロア点ひとつに対して変曲点がたくさん必要であり, 変曲点の数え上げから個数を決める」という基本的なアイデア[7]に影響を与える.

例えば上記エルミート曲線 H において, ガロア点 $P = (1:0:0) \in H$ からの射影 π_P を考察すると, 点 P での分岐指数は $e_P = q$ となることが確認できる. また, 任意の点 $Q \in H$ について, 接線との交わりの重複度は $I_Q(H, T_QH) \geq q$ になっていることも確かめられる.

これら 2 つの現象があまりにも上手く機能してしまっている例がエルミート曲線だと言える.

5. 主定理

この節と次の節では, 平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ は非特異であると仮定する. 前節の最後の 2 つの事象を考慮しながら, 著者は正標数においてエルミート曲線以外[8]の場合のガロア点の個数を決定した ([4, 8, 9]). 吉原氏, 本間氏の結果と合わせて次のように記述される.

主定理 (吉原, 本間, 深澤)**.** $p \geq 0$ を標数とし, $C \subset \mathbb{P}^2$ を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線とする. このとき, 次が成立する.

(I) $\boxed{\delta(C) = 0, 1, d \text{ or } (d-1)^3+1}$ である. さらに:

(1) $\delta(C) = (d-1)^3 + 1 \Leftrightarrow p > 0,\ d = p^e + 1\ \&\ C \sim x^d + y^d + 1 = 0.$

(2) $\delta(C) = d \geq 5$
$\Leftrightarrow p = 2,\ d = 2^e + 1\ \&\ C \sim \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_{2^e}} (x + \alpha y + \alpha^2) + cy^{2^e+1} = 0\ (c \in K \setminus \{0, 1\}).$

(3) $\delta(C) = d = 4 \Leftrightarrow p \neq 2, 3\ \&\ C \sim x^3 + y^4 + 1 = 0.$

(II) $\boxed{\delta'(C) = 0, 1, 3, 7 \text{ or } (d-1)^4 - (d-1)^3 + (d-1)^2}$ である. さらに:

(1) $\delta'(C) = (d-1)^4 - (d-1)^3 + (d-1)^2 \Leftrightarrow p > 0,\ d = p^e + 1\ \&\ C \sim x^d + y^d + 1 = 0.$

(2) $\delta'(C) = 7$
$\Leftrightarrow p = 2,\ d = 4\ \&\ C \sim (x^2+x)^2 + (x^2+x)(y^2+y) + (y^2+y)^2 + 1 = 0.$

(3) $\delta'(C) = 3$ & それらは同一直線上にない
$\Leftrightarrow d$: p で割り切れない, $d-1$: p 冪ではない & $C \sim x^d + y^d + 1 = 0$.

(4) $\delta'(C) = 3$ & それらが同一直線上にある
$\Leftrightarrow p = 2,\ d = 4\ \&\ C \sim (x^2+x)^2 + (x^2+x)(y^2+y) + (y^2+y)^2 + c = 0\ (c \in K \setminus \{0, 1\}).$

定理内 (II)(2) の曲線は, クライン 4 次曲線 $x^3y + y^3 + x = 0$ に射影同値であることが知られている. 従って, この定理はフェルマー曲線とクライン 4 次曲線の新たな特徴づけを与えている.

---

[7]実は, 多項式の条件だけを使う, という代数的な別証明がある. しかしながらこちらも, 正標数においてワイルドに分岐する点をもつ可能性があるときにはそのままでは機能しない.

[8]エルミート曲線に対する個数が先に決定されていたことも, 証明の役に立った. 証明していく際, 「エルミート曲線が標数零の証明をすり抜けられる理由」を考えることで, 証明の穴を見落とさずに済んだと思われる箇所があった.

6. 証明に必要な定理たち

本稿では主に, 内ガロア点の個数 $\delta(C)$ に関する証明について解説する.

$P \in C$ をガロア点とする. ガロア群 G_P の位数は関数体 $K(C)/\pi_P^* K(\mathbb{P}^1)$ の拡大次数 $d-1$ に等しい. $G_P \subset \mathrm{Aut}(C)$ とみなせる. $d-1 = p^e l$ (l は p で割れない) と表示しておく.

定理 1 (自己同型の射影変換への拡張可能性 ([1], Appendix A. 17, 18, [2]))**.** $d \geq 4$ とし, 曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ を非特異とする. $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(C)$, $\exists \hat{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ s.t. $\hat{\sigma}|_C = \sigma$.

適当な射影変換をとることによって $P = (1:0:0)$ としてよい. 定理 1 によって, 任意の $\sigma \in G_P$ は行列で表示される. $\pi_P(x:y:1) = (y:1)$ であることと, 関数体の同型として $\sigma^*(y) = y$ であることを使うと, σ は

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} a(\sigma) & b(\sigma) & c(\sigma) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という形の行列で表現される. 群 G_P の位数に注意すると, $a(\sigma)^l = 1$ となる. ζ を原始 l 乗根とすると, 次の定理が得られる.

定理 2 ([4], Part II)**.** 群の分裂する完全列

$$0 \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e} \to G_P \to \langle \zeta \rangle \to 1$$

が存在する. 特に, l は $p^e - 1$ をわり, G_P は半直積 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e} \rtimes \langle \zeta \rangle$ に同型である.

定理 2 の完全列のカーネルを $\mathcal{K}_P$, コカーネルを $\mathcal{Q}_P$ と書くことにする. $a(\sigma) = \zeta^{i(\sigma)}$ と書ける. 行列 A_σ を使って, $\sigma(Q) = Q$ となる点 $Q \in \mathbb{P}^2$ の集合を考察すると次がわかる.

命題 (固定点集合)**.**

$$\{Q \in \mathbb{P}^2 | \sigma(Q) = Q\} = \{(\zeta^{i(\sigma)} - 1)X + b(\sigma)Y + c(\sigma)Z = 0\} \cup \{P\}$$

自己同型 $\sigma \in G_P \setminus \{1\}$ に対して, 直線 $(\zeta^{i(\sigma)} - 1)X + b(\sigma)Y + c(\sigma)Z = 0$ を L_σ と書くことにする.

注意 1.
- $P \in L_\sigma \Leftrightarrow \sigma \in \mathcal{K}_P$. このとき, 事実 1 と 2(3) より, 直線 L_σ は P を通る C の接線である ($T_P C$ と一致するときとそうでないときがある).
- $\sigma(P) = P$ ($\forall \sigma \in G_P$) より, π_P の P での分岐指数は $d-1$ となることが分かる (事実 2(3)). これは $I_P(C, T_P C) = d$ となることを意味し (事実 1(1)), P は total flex と呼ばれるものとなることがわかる.

非特異平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ に対し, 次を満たす整数 $M(C)$ が存在する:
- 任意の点 $Q \in C$ に対して $I_Q(C, T_Q C) \geq M(C)$.
- 一般の点 $Q \in C$ に対して $I_Q(C, T_Q C) = M(C)$.

本稿ではこの $M(C)$ を generic order of contact と呼ぶことにする.

定理 3 (変曲点の数え上げ [22], Theorem 1.5)**.**

$$\sum_{Q \in C} (I_Q(C, T_Q C) - M(C)) \leq (M(C)+1)(2g-2) + 3d = (M(C)+1)(d^2 - 3d) + 3d.$$

$M(C)=2$ ならば標数零でよく知られた不等式 $\sum_{Q\in C}(I_Q(C,T_QC)-M(C))\leq 3d(d-2)$ を得る[9]. 外のガロア点の個数の決定には, 次の定理も使う.

定理 4 (パルディニ [20], エフェッツ [13], 本間 [15]). $M(C)>2$ ならば, $M(C)$ は p べきであり $M(C)$ は $d-1$ を割る. さらに, $M(C)=d-1$ ならば C はフェルマー曲線に射影同値である.

7. 証明の概要 (内ガロア点の場合)

最も困難な場合である, $p>0$ かつ $p|(d-1)$ となる場合の証明を述べる. $d-1=p^el$ と書いておく.

$\boxed{\text{Step 1}}$ (1) $\delta(C)\geq 2\Rightarrow\delta(C)\geq d$. (2) $\delta(C)>d\Rightarrow M(C)>d/2$.

P_1,P_2 をガロア点とする. 定理 1 より, $\sigma\in G_{P_1}$ ならば, $\sigma(P_2)$ もガロア点であることに注意する. P_2 が total flex である (注意 1) ことに注意すると, $P_1\notin T_{P_2}C$ であり, 事実 1(2) と事実 2(3)(4) から, $\sigma\neq 1$ ならば $\sigma(P_2)\neq P_2$ であることがわかる. 従って (1) を得る. $\delta(C)>d$ のときは, たくさんの total flex をもつことが定理 1 を適用することでわかり, 定理 3 の変曲点の数え上げから従う.

$\boxed{\text{Step 2}}$ $l\geq 3$ & $\delta(C)\geq d\Rightarrow$ 定理 3 に矛盾.

$l\geq 3$ のとき, 固定点集合 (命題) を考察することにより, $I_Q(C,T_QC)=l$ となる点 Q の存在がわかる. l が p で割れないことと, $M(C)>2$ なら $M(C)$ は p 冪であること (定理 4, 文献 [14] など) から, $l>M(C)$ であることがわかる. 各ガロア点に対して $I_Q(C,T_QC)\geq l>M(C)$ となる点を数え上げると, $\delta(C)\geq d$ のとき, 定理 3 の不等式に矛盾することがわかる.

以下, $l\leq 2$ とする.

$\boxed{\text{Step 3}}$ $\delta(C)\geq d$ & $L_\sigma=T_PC$ $(\forall\sigma\in\mathcal{K}_P\setminus\{1\})\Rightarrow\begin{cases}l=2\Rightarrow C\sim(\sum_m\alpha_m x^{p^m})^2+y^{2p^e+1}=0\ (i)\\ l=1\Rightarrow C\sim\sum_m\alpha_m x^{p^m}+y^{p^e+1}=0\ (ii)\end{cases}$

$\boxed{\text{Step 4}}$ Step 3 の $(i)\Rightarrow$ 定理 3 (の精密版) に矛盾.

$l=2$ のときは, p が 2 を割らないので, $p\neq 2$ である. $P=(1:0:0)$ での局所パラメータとして y をとり, 定義式を使って 2 階微分 $\frac{d^2z}{dy^2}$ を計算してみると, 関数体 $K(C)$ の元としてこれは零にはならない. これは $M(C)=2$ を意味する. 関数 $\frac{d^2z}{dy^2}$ の P でのオーダーを計算する. (このように各点で計算した 2 階微分のオーダーの和は, 定理 3 の精密版においては, 同定理の右辺の値で抑えられる.) d 個のガロア点が射影変換で移りあうことを考慮にいれると, そのオーダーの和は定理 3 の右辺を超えてしまい, 矛盾が生じる.

$\boxed{\text{Step 5}}$ Step 3 の (ii) で $\delta(C)\geq d\Rightarrow C\sim x^{p^e}+x-y^{p^e+1}=0$.

[9]標数零では実は等式が成立する. 正標数でも一定の条件があれば等式が成立する.

$\boxed{\text{Step 6}}$ $\delta(C) \ge d$ & $\exists \sigma \in \mathcal{K}_P \setminus \{1\}$ s.t. $L_\sigma \ne T_P C \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ l = 1 \\ M(C) = 2 \ (\Rightarrow \delta(C) = d \text{ by Step 1 (2)}) \end{cases}$ [10]

$P_1, \ldots, P_d$ を (同一直線上にある) ガロア点とし, $P_1 = P$ とする. 事実 2(2) より, 各 i $(2 \le i \le d-1)$ に対して $\exists \tau_i \in G_{P_i}$ s.t. $\tau_i(P_1) = P_d$ となる. $L_\sigma \ne T_P C$ であるとき, i が異なれば $\tau_i(L_\sigma)$ も異なることが確かめられる. L_σ は P を通る接線であり (注意 1), τ_i は射影変換である (定理 1) ことから, 直線 $\tau_i(L_\sigma)$ は P_d を通る接線である. 従って, ガロア点 P_d を通る接線が $d-2$ 本存在することがわかる. 群 G_{P_d} の各元の固定点集合を考察することにより, $G_{P_d} = \mathcal{K}_{P_d}$ かつ $p = 2$ であることがわかる.

$\boxed{\text{Step 7}}$ Step 6 と同じ仮定 $\Rightarrow$ 主定理 (I)(2) の場合のみ, を示す[11].

$P_1, \ldots, P_d$ を (同一直線上にある) ガロア点とし, $P_1 = P = (1:0:0)$ とする. 座標変換により, $P_2 = (0:0:1)$, $Q = (0:1:0) \in T_{P_1}C \cap T_{P_2}C$ とできる. 事実 2(2) より, 各 j $(3 \le j \le d)$ に対して $\exists \tau_j \in G_{P_j}$ s.t. $\tau_j(P_1) = P_2$ となる. τ_j の位数が 2 であることに注意すれば, $\tau_3\tau_j(P_1) = P_1$, $\tau_3\tau_j(P_2) = P_2$, $\tau_3\tau_j(Q) = Q$ となることがわかる. 集合 $H(C) = \{\tau_3\tau_j | 3 \le j \le d\}$ は位数 $d-2 = 2^e - 1$ の巡回群となることが証明できる. $H(C)$ の生成元を $\gamma \in H(C)$ とする. 元 $\sigma \in G_P \setminus \{1\}$ で $b(\sigma) \ne 1, c(\sigma) \ne 1$ となる行列で表現されるものを選ぶと, 適当な座標変換により, $b(\sigma) = c(\sigma) = 1$ とできる. ζ を原始 $2^e - 1$ 乗根とすれば, 自己同型 $\gamma^k \sigma \gamma^{-k}$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta^k & \zeta^{2k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表示されることがわかる $(1 \le k \le 2^e - 1)$. 行列の形から $\gamma^k \sigma \gamma^{-k} \in G_P$ も確かめられる. G_P の各元の行列表示が具体的に求められたので, 不変な多項式を考えて接空間のあり方などに注意すると, 主定理 (I)(2) に現れる式 ($c = 1$ も許したもの) となることが確かめられる. 非特異になる条件を考慮すると, y^d の係数 c は $c \ne 1$ となることが必要である[12].

8. 今後の課題

非特異曲線に対してガロア点の個数が明らかにされたので, 特異点を許したらどうなるか, ということが次の課題となる. しかしながらそれは一般には容易ではない. 例えば, 定理 1 が一般には成り立たない. 前節の証明のアイデアをみてもわかると思うが, この定理がかなり有効に働いている. またそれによって, 定理 2 も一般には成り立たない. 実際, 群は様々なものが出てくることが知られている (例えば [17, 25] を見よ). 一般には難し過ぎるので少し絞り込むと, 例えば次の問題が挙げられる.

問題 1. ガロア点を複数もつ特異平面曲線をみつけよ. そしてそれを (ガロア点の配置によって) 特徴づけよ.

---

[10] 論文 [4, Part III] では, ここで $\delta(C) = d$ を示すのに定理 4 を必要とする書き方になっているが, 必要ないことに最近気づいた.

[11] この証明には, 論文 [4, Part III] の後に, 2 年ほど掛かった.

[12] この証明が完成した数ヶ月後に本間氏と (別の内容について) 議論した際, $c = 1$ とした曲線は $(s^{2^e+1} : s^{2^e} + s : 1)$ とパラメトライズされる有理曲線であることに気づいた. 付録のテーブルにも (射影同値な例が) 現れているが, この曲線は別個にガロア点の配置を考察していた [7]. 全く関係なさそうなのに裏で繋がっている感じがして, 不思議だと思う.

但し, 話をシンプルにするため, 内は内だけで複数, 外は外だけで複数, を考えることにする[13]. そうすると, 現在まで知られている例は下記の付録のテーブルに書かれたもので (ほとんど) 尽くされている.

次の問題も自然ではあるが例が知られておらず, 最近ようやく高橋剛氏によって与えられた ([23])[14].

問題 2. 群が異なるガロア点を 2 つもつ平面曲線をみつけよ.

テーブルを見ていただけるとわかると思うが, ガロア点をたくさんもつ例の上位は正標数の曲線で占められている. 正標数の研究は一般には難しいと思うが,「ガロア点をたくさんもつ例を見つけよ」という問題に関しては実は正標数の方が易しかった, という側面もある. 次の問題が未解決であることがそのことをよく表している.

問題 3. $p = 0$ のとき, $\delta(C) \leq 4$, $\delta'(C) \leq 3$ は成り立つか？

注意 2. これに関しては次の部分解が与えられている.

- (Duyaguit-三浦 [3]) d が素数で C が非有理的のとき $\delta'(C) \leq 3$.
- (三浦 [18]) $d-1$ が素数のときの $\delta(C)$ に関する不等式. 特に, $d = 4$ のとき $\delta(C) \leq 4$.
- (吉原 [25]) 次数 $d \neq 12, 24, 60$ の有理曲線について $\delta'(C) \leq 3$.

著者は, 標数 $p \neq 2$ において, $\delta(C) < \infty$ ならば $\delta(C) \leq (d-1)^3 + 1$ であり, この個数に到達するものはエルミート曲線に限られることを最近示した ([10]). この証明は標数零にも適用できるので上限 $(d-1)^3$ を与えていることになる. しかしながら "4" には程遠い[15].

標数零では難しいので, 正標数で上から降りてきたら徐々に解答に近くなっていくのではないか, と個人的には考えている.

ガロア点全般の未解決問題については [27] があるので, そちらをご覧ください.

9. 付録：複数のガロア点をもつ平面曲線のテーブル
(2011 年 8 月 30 日更新)

9.1. **内ガロア点.**

$\delta(C)$	標数 p	次数	定義式 (or パラメータ)	群	特徴づけ?	文献
∞	>0	q	$x - y^q = 0$	巡回	Yes	[11]
q^3+1	>0	$q+1$	フェルマー	初等 p	Yes ($p \neq 2$ or 非特異)	[16]
$q+1$	>0	$q+1$	$(s^{q+1} : (s+1)^{q+1} : 1)$	初等 p	No	[7]
$q+1$	2	$q+1$	$\prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q}(x + \alpha y + \alpha^2) + cy^{q+1} = 0$ $(c \neq 0, 1)$	初等 p	Yes (非特異)	[9]
4	$\neq 2, 3$	4	$x^3 + y^4 + 1 = 0$	巡回	Yes (非特異)	[19]
2	0	4	$x^4 - x^3y + y^3 = 0$	巡回	No	[18]

[13] 内と外を同時にもつものはもう少し知られている. また, 特異点がガロア点であるものの研究もあるがここでは触れない.

[14] 2011 年 6 月に開催された佐渡シンポジウムでの高橋氏の講演で公表された (氏はこの問題とは別の目的でやっていて, この問題の例がひとつも与えられていなかったことを発表時には忘れていたようである). 例自体は有名かもしれない. 例えば $d = 4$ のときはハーツホーン [12, I. Ex. 5.1] に (射影同値な例が) 載っている.

[15] 非特異モデルの種数 g が 2 以上であれば, フルヴィッツの自己同型の位数の上限 $84(g-1)$ を使って, ガロア点の個数の上限を与えることができるが, それでも簡単な考察だと d の一次式になる. 標数零のガロア点はもっと "rare" な感じがするので, これだけでは意味のあることと言えないであろう.

9.2. **外ガロア点.**

$\delta'(C)$	標数 p	次数	定義式 (or パラメータ)	群	特徴づけ?	文献
∞	>0	p^e	$\sum_{i=0}^{e}(\alpha_i x^{p^i}+\beta_i y^{p^i})=0$	初等 p	Yes	[11, 6]
$q^4-q^3+q^2$	>0	$q+1$	フェルマー	巡回	Yes (非特異)	[16]
$q(q+1)/2$	>0	$q+1$	$(s^{q+1}:(s+1)^{q+1}:1)$	巡回	No	[7]
$q+1$ or $q-1$	2	$2q$	$(x^q+x)^2+(x^q+x)(y^q+y)$ $+\lambda_1(y^q+y)^2+\lambda_0=0$ $(\lambda_1\in\mathbb{F}_q,\ (q,\lambda_1,\lambda_0)\neq(2,1,1))$	初等 p	No	[8]
7	2	4	クライン４次	初等 p	Yes (非特異)	[4]
3	≥ 0	$\neq 0 \bmod p$ $\neq q+1$	フェルマー	巡回	Yes (非特異)	[19, 24]
3	0		$(s^d:(s+1)^d:1)$	巡回	No	[25]
≥ 2	0	$2m$	$x^{2m}+x^m+y^{2m}=0$	巡回 二面体	No	[23]

テーブルについての注意

- $\delta(C)$ (resp. $\delta'(C)$) を考察する際は, $d\geq 4$ (resp. $d\geq 3$) を仮定する.
- $\delta'(C)$ の欄が "≥ 2" となっているものは, 2 以上であることは分かるが, 実際には何個あるか明らかにされていない.
- 標数 p が正のとき, q は p の冪であるとする.
- 標数 p の欄が "0" になっているものは, $p=0$ で明らかにされているものであり, $p>0$ でもある程度成立することは容易に推察されるが, 正標数での条件をきちんと述べた文献がないものについてはそのような表記にしてある.
- "群" はガロア点のガロア群として現れるものを意味する.
- "初等 p" は可換 p 群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e}$ を表す.
- "特徴づけ?" は "その曲線がガロア点の配置によって特徴づけられているか?" を意味する. Yes の後にカッコ付けで書かれているものは,「その条件下で特徴づけられていること」を表す (その条件はまだ外せていない).
- "文献" はその曲線のガロア点の分布が初めて述べられた文献とした (その曲線が特徴づけられた文献は必ずしも出していない).

謝辞. たいへん活気のある高知集会での講演の機会を与えて頂き, またお世話になりました, 福間慶明先生と小島秀雄先生に感謝いたします.

今回の高知集会では私が 2006 年から取り組んでいた 2 つの問題の解決が報告されました (ひとつは古川勝久さんの報告, もうひとつはこの報告). たくさんのみなさんにお世話になり, 感謝致しております. 特に, ガウス写像を含め多くのことをお教えくださった楫元先生, 共に議論をし問題を解決くださった古川勝久さん, ガロア点研究の基本を伝授くださいました三浦敬さん, 本稿の問題を解くための「正標数ガロア点セミナー」にお付き合い頂いた長谷川武博さん, にこの場を借りて感謝の意を表します.

References

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris, Geometry of Algebraic Curves, Vol. I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **267**. Springer-Verlag, New York (1985).

[2] H. C. Chang, On plane algebraic curves, Chinese J. Math. **6** (1978), 185–189.

[3] C. Duyaguit and K. Miura, On the number of Galois points for plane curves of prime degree, Nihonkai Math. J. **14** (2003), 55–59.

[4] S. Fukasawa, On the number of Galois points for a plane curve in positive characteristic, Comm. Algebra **36** (2008), 29–36; II, Geom. Dedicata **127** (2007), 131–137; III, ibid. **146** (2010), 9–20.

[5] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Geom. Dedicata **139** (2009), 211–218.

[6] S. Fukasawa, Classification of plane curves with infinitely many Galois points, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 195–209.

[7] S. Fukasawa, Galois points for a non-reflexive plane curve of low degree, preprint.

[8] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in characteristic two, preprint.

[9] S. Fukasawa, Complete determination of the number of Galois points for a smooth plane curve, preprint, arXiv:1011.3648.

[10] S. Fukasawa, Characterization of a Hermitian curve by Galois point, preprint, arXiv:1108.5823.

[11] S. Fukasawa and T. Hasegawa, Singular plane curves with infinitely many Galois points, J. Algebra **323** (2010), 10–13.

[12] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, GTM 52, Springer (1977).

[13] A. Hefez, Non-reflexive curves, Compositio Math. **69** (1989), 3–35.

[14] A. Hefez and S. Kleiman, Notes on the duality of projective varieties, “Geometry Today,” Prog. Math. vol 60, Birkhäuser, Boston, 1985, pp. 143–183.

[15] M. Homma, A souped-up version of Pardini’s theorem and its application to funny curves, Compositio Math. **71** (1989), 295–302.

[16] M. Homma, Galois points for a Hermitian curve, Comm. Algebra **34** (2006), 4503–4511.

[17] M. Kanazawa and H. Yoshihara, Galois group at Galois point for genus-one curve, Internat. J. Algebra **5** (2011), 1161-1174.

[18] K. Miura, Galois points on singular plane quartic curves, J. Algebra **287** (2005), 283–293.

[19] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226** (2000), 283–294.

[20] R. Pardini, Some remarks on plane curves over fields of finite characteristic, Compositio Math. **60** (1986), 3–17.

[21] H. Stichtenoth, Algebraic Function Fields and Codes, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1993).

[22] K. O. Stöhr and J. F. Voloch, Weierstrass points and curves over finite fields, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), 1–19.

[23] T. Takahashi, Galois point for a plane curve with one or two singular points, in preparation.

[24] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340–355.

[25] H. Yoshihara, Galois points for plane rational curves, Far east J. Math. **25** (2007), 273–284; Errata, ibid. **29** (2008), 209–212.

[26] 吉原久夫, 研究紹介, available at
http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/staffs/Hisao_Yoshihara.pdf

[27] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, available at
http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/˜yosihara/openquestion.html

E-mail address: `s.fukasawa@sci.kj.yamagata-u.ac.jp`