# Galois points for a normal hypersurface

深澤 知 (山形大学理学部)

## 1. はじめに

本稿では, 正規超曲面のガロア点の分布に関して, 高橋剛氏 (長岡高専) との共同研究 [7] によって得られた結果とその周辺について解説を行なう. 本稿は, 研究集会「特異点と多様体の幾何学」(2010 年 9 月 15 日から 18 日, 山形大学理学部) の報告 (pp.31–39) をベースにしている. 報告後に論文自体を若干修正したこともあり, 2014 年の現状を踏まえて加筆・修正した. 論文もようやく出版に至ったため, 公表するのによい時期と判断した.

## 2. ガロア点

基礎体 $K$ を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とし, 次元 $n$, 次数 $d \geq 3$ の既約代数的超曲面 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を考える. 点 $P \in \mathbb{P}^{n+1}$ からの射影 $\pi_P : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ を考えると, 関数体の拡大 $K(X)/\pi_P^* K(\mathbb{P}^n)$ を得る. このとき, 吉原久夫氏は次の定義を与えた ([3, 10, 12, 13, 14]).

**定義 1.** 体拡大 $K(X)/\pi_P^* K(\mathbb{P}^n)$ が (有限かつ[1]) ガロア拡大となるとき, $P$ を $X$ の**ガロア点**という.

さらに, ガロア点 $P$ が, $P \in X$ のときは**内ガロア点**, $P \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus X$ のときは**外ガロア点**であるという. ガロア点は関数体の部分体を研究するために導入されたようである ([10, 12]).[2] ガロア点に関しては様々な問題が考えられるが, 次の自然な問題を考える.

**問題.** 与えられた超曲面 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ に対して, ガロア点はいくつ存在するか？

この問題を考察するため, つぎの記号を準備する.

- $\Delta(X) := \{P \in X \setminus \mathrm{Sing}(X) \mid P$ は $X$ のガロア点$\}$
- $\Delta'(X) := \{P \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus X \mid P$ は $X$ のガロア点$\}$

ここで, $\mathrm{Sing}(X)$ は $X$ の特異点全体の集合とする. 次数 $d = 3$ の場合には, $\Delta(X) = X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ となることは明らかなので, この場合には外のガロア点しか考えない.

*Date*: 2014 年 1 月 16 日.

[1]点 $P$ が錐の頂点であるときはあまり興味深くはないので, そのときを除く仮定.

[2](平面曲線の) ガロア点が導入されたのは 1996 年だそうである ([3]). 吉原氏は当時, 曲線の gonality に相当する「非有理次数」を曲面の場合に研究しており, ある曲面を考察していた際, それは非特異 4 次平面曲線の gonality を調べればよいことがわかった (と過去に話を聞いたが記憶違いがあるかもしれない). 一方, 非特異平面曲線の gonality を与える射は, 平面曲線上の点からの射影で与えられることが古典的に知られている (Noether, 難波). ガロア点が初めて登場する論文は [10] である. 最近では, 当初の目的から少しばかり離れた研究が盛り上がっている印象がある.

以下, $s(X) := \dim \mathrm{Sing}(X)$ と定める.（$X$ が非特異のときは $s(X) = -1$ と定める.）また $P \in \Delta(X) \cup \Delta'(X)$ のとき, ガロア拡大 $K(X)/\pi_P^* K(\mathbb{P}^1)$ のガロア群を $G_P(X)$ (または単に $G_P$) で表す.

$\mathbb{P}^{n+1}$ 内の異なる 2 点 $P, Q \in \mathbb{P}^{n+1}$ が与えられたとき, $P$ と $Q$ を結んだ直線を $\overline{PQ}$ で表す.

## 3. 例

**例 1** ([13]). $p = 0$ とし, $X \subset \mathbb{P}^3$ を

$$X_2X_0^3 + X_3X_1^3 + X_2^4 + X_3^4 = 0$$

で定義される超曲面とする. このとき, 次が成立する.

(i) $X$ は非特異である.
(ii) $P_0 = (1:0:0:0)$, $P_1 = (0:1:0:0) \in \Delta(X)$.
(iii) $\sharp\Delta(X) = 8$.

(ii) について, $P_0$ がガロア点であることを確かめよう. 射影 $\pi_{P_0}$ は $\pi_{P_0} = (X_1 : X_2 : X_3)$ で与えられる. $X_i/X_2 = x_i$ $(i = 0, 1, 3)$ とおくと, $K(X)/\pi_{P_0}^* K(\mathbb{P}^2) = K(x_0, x_1, x_3)/K(x_1, x_3)$ であり, $x_0$ は $x_0^3 + x_3x_1^3 + x_3^4 + 1 = 0$ を満たす. 従って, 体拡大 $K(X)/\pi_{P_0}^* K(\mathbb{P}^2)$ はガロア拡大 (より詳しくは巡回拡大) になっている.

$l_0$ (resp. $l_1$) を $X_1 = X_3 = 0$ (resp. $X_0 = X_2 = 0$) で定義された直線とすると, 各々に 4 つの内ガロア点が乗っている.

**例 2** ([11]). $p = 0$ とし, $X \subset \mathbb{P}^3$ を

$$X_2X_0^3 + X_3X_1^3 + X_2^4 = 0$$

で定義される超曲面とする. このとき, 次が成立する.

(i) $\mathrm{Sing}(X) = \{(0:0:0:1)\}$.
(ii) $P_0 = (1:0:0:0)$, $P_1 = (0:1:0:0) \in \Delta(X)$.
(iii) $\sharp\Delta(X) = 5$.

$l_0$ を $X_1 = X_3 = 0$ で定義された直線とすると, 4 つの内ガロア点が乗っている. ところが (例 1 とは異なり), $P_1$ を通る直線で複数のガロア点が乗っているものは存在しない.

ここで後々のために, 次の定義を与えておく.

**定義 2.** $P_0, \ldots, P_r$ を内 (resp. 外) ガロア点とする. ガロア点の集合 $\{P_0, \ldots, P_r\}$ が**独立** (independent) であるとは, 任意の $i \neq j$ に対して $P_i$ と $P_j$ を結んだ直線 $\overline{P_iP_j}$ 上の内 (resp. 外) ガロア点は $P_i, P_j$ のみであるときに言う.

**例 3.** 例 1 と 2 において, ガロア点の集合 $\{P_0, P_1\}$ は独立である.

## 4. 既知の結果

ガロア点に関しては多くの結果が得られている (例えば, 吉原氏のウェブページとそこにある未解決問題集 [16], またはサーベイ論文 [3] で概観できる). ここではそれら結果のうち我々の問題に直接関係するものを挙げよう. ここで $[*]$ は $*$ の整数部分を表す.

(1) $p = 0$, $n = 1$, $s(X) = -1$ のとき (吉原 [12]).

- $\sharp\Delta(X) = 0, 1$ or $4$.
- $\sharp\Delta'(X) = 0, 1$ or $3$.

(2) $p > 0$, $n = 1$, $s(X) = -1$ のとき (本間 [8], 深澤 [2, 4]).[3]
- $\sharp\Delta(X) = 0, 1, d$ or $(d-1)^3 + 1$.
- $\sharp\Delta'(X) = 0, 1, 3, 7$ or $(d-1)^4 - (d-1)^3 + (d-1)^2$.

(3) $p = 0$, $n = 2$, $d = 4$, $s(X) = -1$ のとき (吉原 [13]).
- $\sharp\Delta(X) = 0, 1, 2, 4$ or $8$.

(4) $p = 0$, $n \geq 2$, $d \geq 4$, $s(X) = -1$ のとき (吉原 [14]).
- $d = 4 \Rightarrow \sharp\Delta(X) \leq 4([n/2] + 1)$.
- $d \geq 5 \Rightarrow \sharp\Delta(X) \leq [n/2] + 1$.
- $d \geq 4 \Rightarrow \sharp\Delta'(X) \leq n + 2$.

(5) $p = 0$, $n = 2$, $d = 4$, $s(X) \leq 0$ のとき (高橋 [11]).
- $X$ が錐でない $\Rightarrow \sharp\Delta(X) = 0, 1, 2, 4, 5$ or $8$.
- $X$ が錐のときにも $\Delta(X)$ を決定.

また, 最大個数をもつものの定義方程式が決定されている. しかしながら高次元で特異点集合の次元が高い場合には, 十分な結果が得られていなかったようである.

**注意 1.** 「ガロア点が無限個存在することはあるのか？」という質問が講演中にあった. ガロア点をもつ超曲面の錐多様体を考えれば, 無限個もつことが可能である. また, 後で述べられることであるが, 標数零で $s(X) \leq n - 2$ であれば, 今回の我々の結果からガロア点を無限個もつ超曲面は錐多様体に限定されることがわかる. 正標数の場合には, 平面曲線でガロア点を無限個もつものが存在するが, 長谷川武博氏と著者により完全に分類されている ([5, 6]).

## 5. 主結果

3 節で述べられた結果 (4) の特異点を許した場合ならびに (5) の高次元化・一般次数化の方向で, 条件 $s(X) \leq n - 2$ の下, 我々は次の結果を得た.

**定理 1** ([7])**.** $p = 0$, $n \geq 1$, $d \geq 4$, $s = s(X) \leq n - 2$ とし, $m = m(n, s) := [(n + s + 1)/2]$ と定める (ここで, $[*]$ は $*$ の整数部分である). $X$ は錐でないと仮定する. このとき, $\Delta(X)$ は有限集合である. さらに次のように, $\Delta(X)$ の濃度の上限を与え, その上限に到達する超曲面の定義方程式を決定することができる.

| 次数 | 条件 | $\sharp\Delta(X)$ の上限 | 定義式 |
|---|---|---|---|
| $d = 4$ | $s = -1$ | $4(m(n, s) + 1)$ | (1) |
| | $s \geq 0$ and $n + s$: odd | $4(m(n, s) - s - 1) + (s + 2)$ | (2) |
| | $s = 0$ and $n + s$: even | $4m(n, s) + 1$ | (3) |
| | $s = 1$ and $n + s$: even | $4(m(n, s) - 1)$ | (4) |
| | $s = 2$ and $n + s$: even | $4(m(n, s) - 2)$ | (5-1) or (5-2) |
| | $s \geq 3$ and $n + s$: even | $4(m(n, s) - s - 1) + (s + 2)$ | (6) |
| $d \geq 5$ | | $m(n, s) + 1$ | (7) |

定義方程式はつぎである.

(1) $X_{m+1}X_0^3 + \cdots + X_{2m+1}X_m^3 + X_{m+1}^4 + \cdots + X_{n+1}^4 = 0$.

[3] 2011 年に解決した (Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **129** (2013), 93–113).

(2) $X_{m+1}X_0^3+\cdots+X_{2m-s-1}X_{m-s-2}^3+X_{2m-s}(X_{m-s-1}^3+\cdots+X_m^3)+X_{m+1}^4+\cdots+X_{2m-s-1}^4+aX_{2m-s}^4=0.$
(ここで $a=0$ or 1.)

(3) $X_{m+1}X_0^3+\cdots+X_{2m+1}X_m^3+X_{m+1}^4+\cdots+X_{2m}^4=0.$

(4) $X_{m-1}X_0^3+\cdots+X_{2m-3}X_{m-2}^3+X_{m-1}^4+\cdots+X_{2m-3}^4+G=0.$
(ここで $G\in K[X_{2m-2},X_{2m-1},X_{n+1}]$ は重複する成分をもつ.)

(5-1) $X_{m-2}X_0^3+\cdots+X_{2m-5}X_{m-3}^3+X_{m-2}^4+\cdots+X_{2m-5}^4+G_1=0.$
(ここで $G_1\in K[X_{2m-4},\ldots,X_{n+1}]$ は重複する成分をもつ.)

(5-2) $X_{m+1}X_0^3+\cdots+X_{2m-3}X_{m-4}^3+X_{2m-2}X_{m-3}^3+A_{m-2}X_{m-2}+A_{m-1}X_{m-1}^3+A_mX_m^3+X_{m+1}^4+\cdots+X_{2m-3}^4+G_2=0.$
(ここで $A_{m-2},A_{m-1},A_m,G_2\in K[X_{2m-2},X_{n+1}]$.)

(6) $X_{m+1}X_0^3+\cdots+X_{2m-s-1}X_{m-s-2}^3+X_{2m-s}X_{m-s-1}^3+A_{m-s}X_{m-s}+\cdots+A_mX_m^3+X_{m+1}^4+\cdots+X_{2m-s-1}^4+G=0.$
(ここで $A_{m-s},\ldots,A_m,G\in K[X_{2m-s},X_{n+1}]$.)

(7) $X_{m+1}X_0^{d-1}+\cdots+X_{2m-s}X_{m-s-1}^{d-1}+A_{m-s}X_{m-s}^{d-1}+\cdots+A_mX_m^{d-1}+G=0.$
(ここで $A_{m-s},\ldots,A_m,G\in K[X_{m+1},\ldots,X_{n+1}]$.
さらに $s=-1$ のときは, $A_{m-s}^{d-1}X_{m-s}+\cdots+A_mX_m^{d-1}$ は現れない.)

**注意 2.** $d=4$, $n=2$, $s=0$ とすれば $n+s=2$ であり, 定理の表の上から 3 番目が対応する. このときの上限は $4m(n,s)+1=4[(2+0+1)/2]+1=5$ であり, 定義多項式は上で考察した例 2 と同一のものである. 高橋氏の結果 [11] に対応した結果が得られている.

**定理 2** ([7])**.** $p=0$, $n\geq 1$, $d\geq 3$, $s=s(X)\leq n-2$ とする. $X$ は錐でないと仮定する. このとき, $\Delta'(X)$ は有限集合である. さらに次のように, $\Delta'(X)$ の濃度の上限を与え, その上限に到達する超曲面の定義方程式を決定することができる.

| 条件 | $\sharp\Delta'(X)$ の上限 | 定義式 |
|---|---|---|
| $s=-1$ | $n+2$ | $X_0^d+\cdots+X_{n+1}^d=0$ |
| $s\geq 0$ | $n-s$ | $X_0^d+\cdots+X_{n-s-1}^d+G=0$ (ここで $G\in K[X_{n-s},\ldots,X_{n+1}]$ は重複する成分をもつ.) |

**注意 3.** さらに錐の場合にも $\Delta(X)$ と $\Delta'(X)$ を決定することができる.

## 6. 証明の鍵となる定理たち

主結果の証明には,

(1) ガロア点に関する超平面切断の定理

(2) 自己同型が射影変換に拡張されるガロア点の多項式判定法 (Key Lemma)

の 2 つが鍵となる. より詳しくは, 次のように述べられる.

**超平面切断定理.** $p\geq 0$, $n\geq 2$, $d\geq 3$, $X\subset\mathbb{P}^{n+1}$ は次数 $d$ の超曲面で $0\leq s(X)\leq n-2$ (resp. $s(X)=-1$) を満たすとする. $P\in\Delta(X)\cup\Delta'(X)$ とする. このとき, 次が成立する.

(i) $P$ を含む一般の超平面 $H$ は次の条件 $(\star)$ をみたす.

– $X_H := X \cap H \subset H \cong \mathbb{P}^n$ は, 次数 $d$ の既約な超曲面であり, $s(X_H) = s(X) - 1$ (resp. $s(X_H) = -1$) である.
– $P \notin \mathrm{Sing}(X_H)$.
– $X_H$ の一般の点での接空間は $P$ を含まない.

(ii) $H$ が $(\star)$ を満たす $P$ を通る超平面であるとき, $P$ は $X_H$ のガロア点である.[4]
(iii) (ii) と同じ仮定の下, $G_P(X) \cong G_P(X_H)$ である.

**Key Lemma.** $p = 0$, $0 \le m \le d-2$, $P = (1:0:\cdots:0) \in \mathbb{P}^{n+1}$ とし, $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の $X_0 \neq 0$ における定義多項式を, $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$ と表示しておく. このとき, 次は同値である.

$(1)_m$ $P$ での重複度は $m$ であり, 多項式 $f_m$ は $f_{m+1}$ を割り切り, 次が成り立つ.

$$f_{m+i} = \binom{d-m}{i} f_m \left( \frac{f_{m+1}}{(d-m)f_m} \right)^i \quad (i = 0, 1, \ldots, d-m-1).$$

$(2)_m$ $P$ を固定する適当な射影変換により, $X$ の定義方程式は

$$g_m(x_1, \ldots, x_{n+1}) + g_d(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$$

によって与えられる. ここで, $g_m$ と $g_d$ はそれぞれ次数 $m$ と $d$ の斉次多項式である.

$(3)_m$ $P$ は重複度 $m$ のガロア点であり, 任意の双有理変換 $\sigma \in G_P(X)$ は射影変換の制限である.

超平面切断定理と Key Lemma を合わせて, 次が示される.[5]

**命題.** $p = 0$, $s(X) \le n-2$ とする. ここで $(3)_1$, $(3)_0$ より弱い次の条件を考える.

$(3')_1$ $P \in \Delta(X)$
$(3')_0$ $P \in \Delta'(X)$

このとき,

- $(3')_1 \Leftrightarrow (1)_1, (2)_1$.
- $(3')_0 \Leftrightarrow (1)_0, (2)_0$.

が成立する. 特に, ガロア点による双有理写像は射影変換の制限である.

従って, 与えられた点がガロア点かどうかを判断するには, Key Lemma における多項式的条件 $(1)_m$ $(m = 0, 1)$ を確かめればよいことがわかった.

---

[4] 単に「$P$ を通る一般の超平面 $H$ について $X_H$ が $P$ のガロア点」というだけではなく, 超平面の条件 $(\star)$ を具体的に記述しているところにも意義がある. このことが後に出てくるフェルマー超曲面のガロア点の分布を決定する際 (定理 4), 有効に働く.

[5] $n = 1$ で正しいことは, 非特異平面曲線の場合の考察による ([12, 15]). 後は, 超平面切断定理と Key Lemma を用いて, 次元 $n$ に関する帰納法を走らせる. 吉原氏 [14] の $s(X) = -1$ のときの証明は超平面切断を用いるものではなく, 直接的に「ガロア点による双有理写像が射影変換に拡張される」ことを示している. しかしながらそこでは解析的な手法が用いられており, かなり繊細な議論が行なわれている印象を受ける. 我々の方法は高橋氏 [11] のアイデアを一般化したものであるが, 多項式の条件から「射影変換に拡張される」ことを導き出している点に特徴がある. 著者は高橋氏のアイデアを初めて知ったとき, 深い感銘を受けた.

## 7. 証明のアイデア

ここでは, 定理 1 の証明の基本的なアイデアについて述べる. $X$ は錐ではないと仮定する.

(1) 独立したガロア点の長さ $(:= r(X)-1)$ の上限を決める: $r(X) \leq m$.
(2) Key Lemma を用いて, 直線上に乗り得るガロア点の個数を決める. より詳しくは, 次を示す.
  (2-1) $l \subset X$ を直線とすると, $\sharp(l \cap \Delta(X)) = 0, 1$ or 2.
  (2-2) $d \geq 5$ のとき, $l \not\subset X$ を直線とすると, $\sharp(l \cap \Delta(X)) = 0$ or 1.
  (2-3) $d = 4$ のとき. $P_0, \ldots, P_r$ を最大の長さを持つ独立ガロア点とし, $Q$ を (どの $P_i$ とも等しくない) ガロア点としたとき, ただひとつの $i$ が存在して $\sharp(\overline{P_iQ} \cap \Delta(X)) = 4$ となる.
(3) $d \geq 5$ ならば, (2-1)(2-2) よりガロア点の集合は独立でなくてはならないので, (1) より $\sharp\Delta(X) \leq m+1$ となる.
(4) $d = 4$ の場合は, 4 つのガロア点が乗っている直線の個数 $(:= \mu(X)-1)$ の上限を求める: $\mu(X) \leq m - s(X) - 1$. さらに (1) を考慮して, 特異点の状況を調べて上限を決める.

**注意 4.** 「$\sharp\Delta(X)$ が無限集合のとき錐である」という命題は, (2-1)(2-2)(2-3) をより詳しくした補題に議論を加えて, 証明される.

(4) の段階で, 例えば, 次が証明される (特異点を考慮すれば, よりシャープな上限を与えることができる).

**定理 3** ([7])**.** $d = 4$ のとき, 次が成り立つ.

$$\text{(Rough Bound)} \quad \sharp\Delta(X) \leq 4(m - s(X)) + (s(X) + 1).$$

**(理由).** $\sharp\Delta(X) = 4(\mu(X)+1) + (r(X) - \mu(X))$ であることがわかる. ここで $\mu(X) \leq r(X) \leq m$, $\mu(X) \leq m - s(X) - 1$ であり, $\sharp\Delta(X)$ の値は $\mu(X)$ と $r(X)$ が上限の値をとればそれ以下なので, $\mu(X) = m - s(X) - 1$, $r(X) = m$ を代入すると求めるものを得る. □

## 8. 超平面切断定理の応用

超平面切断定理には 2 つの応用がある. 平面曲線の場合の群構造に関する結果 ([2]) と合わせて, 一般の場合の群構造を決定できる.[6]

**系** ([7])**.** $p \geq 0$, $d \geq 3$, $s(X) \leq n-2$ とする. $P \in X$ (resp. $P \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus X$) を $X$ のガロア点とし, $p > 0$ のときには $d - 1 = p^e l$ (resp. $d = p^e l$) と表示する ($l$ は $p$ で割れない). このとき, $l$ は $p^e - 1$ を割り, $G_P(X) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e} \rtimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ となる.

本間氏の Hermitian 曲線のガロア点の結果 ([8]) と合わせて, 本間氏の結果を高次元化できる.

**定理 4** ([7])**.** $p > 0$, $q \geq 3$ (resp. $q = 2$) を $p$ べき, $F_n(q+1)$ を次元 $n$, 次数 $q+1$ のフェルマー超曲面とする. 点 $P \in \mathbb{P}^{n+1}$ (resp. $P \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus F_n(q+1)$) について, $P$ が $F_n(q+1)$ のガロア点であることと $\mathbb{F}_{q^2}$-有理点であることは同値である.

[6] $p, e > 0$, $l > 1$ のときは半直積となることを示しているが, 同型類がどのくらい出るかまでは精密に調べていない.

**注意 5.** 定理 4 は, 次数を高くすれば ($F_n(q+1)$ 上にもその外にも $\mathbb{F}_{q^2}$-有理点が増えるので), ガロア点の個数がいくらでも大きくなることを意味する. フェルマー超曲面は非特異であるので, 標数零における吉原氏の上限 (4 節 (4)) は標数 $p>0$ では成立していないことがわかる.

## 9. 正標数におけるガロア点を無限個もつ錐ではない正規超曲面

標数 $p>0$ では, $\Delta(X)$ が無限集合であるが錐ではない正規超曲面が存在する.

**例 4** ([7]). $p>0$ とし, $X\subset\mathbb{P}^3$ を

$$ZW^p - X^pW - Y^{p+1} = 0$$

で定義される超曲面とする. $P=(0:0:1:0)$, $Q=(1:0:0:0)$ とし, $L$ を $Y=W=0$ で定義される直線とする. このとき, 次が成立する.

(i) $\mathrm{Sing}(X)=\{P\}$.
(ii) $X$ は錐ではない.
(iii) $L\setminus\{P,Q\}\subset\Delta(X)$.

(iii) については, $L\setminus\{P,Q\}$ の点からの射影を考えると, Artin-Schreier 拡大となることが確かめられる.

## 10. ガロア点の幾何学的解釈は？(余談)

講演の際にもこの題目のような質問があった. 正規超曲面上のガロア点については, 次のような幾何学的な必要条件がある (ここで $p=0$ とし, $T_PX$ は $X$ の $P$ での接空間とする).

(1) $n=1$, $s(X)=-1$ のとき, $P\in\Delta(X)$ は total flex, 即ち, 接線 $T_PX$ と $X$ との $P$ での交わりの重複度は $d$ である.
(2) $n\geq 2$, $s(X)\leq n-2$ のとき, $P\in\Delta(X)$ について $T_PX\cap X$ の $P$ での重複度は $d$ である. 特に $s(X)=-1$ であるとき, $T_PX\cap X$ は $P$ を頂点とする錐多様体である. (Cools-Coppens [1] はこのような点を “star point” と呼んでいる.)

これらは大変強い条件であるが, 内ガロア点の十分条件にはなっていない. 例えばフェルマー超曲面は, $n=1$ のとき多くの total flex を, $n\geq 2$ のとき多くの star point をもつが, それらはいずれもガロア点にはなっていない. 従って, ガロア点には (目には見えない) もっと強い制限が課せられている.[7]

また $s(X)=n-1$ であると, このような必要条件は (今のところ？) 存在しない. 特異平面曲線上に flex でないガロア点が存在することもある ([9, Example 1]).

[7] 著者の主観としては, これは「多項式の繊細さ」から来るものであると思う. 今回の我々の結果の証明においてはこのような幾何学的条件を用いず, Key Lemma の多項式的条件 $(1)_m$ を頻繁に使用している. 恥を恐れずに言えば, 著者は始めは幾何学的条件を使って色々と証明しようと考えていたが, 思うように進まなかった. 必要な補題たち (例えば 7 節 (2-1)(2-2)(2-3)) を多項式条件で証明できることを, 高橋氏が実証してくれた.

## 11. 未解決問題

ガロア点全般に関しては, 吉原氏と著者による未解決問題集 [16] にたくさんの問題が載せられている. ここでは今回の結果に関係するものを述べるが, 単純には「標数 $p>0$ でもガロア点の個数の上限や分布を調べよ」というものである.

現在では正標数の非特異平面曲線についても分布は解明している[8]が, 高次元 ($n \geq 2$) で非特異の場合には, 次の問題が考えられる.

**未解決問題 1.** 標数 $p>0$ とし, $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を非特異超曲面とする. ガロア点の個数の上限を (次数 $d$ を用いて, 或いは別の表現で) 求めよ.

8 節で述べたように $p>0$ であるとき, 次数を高くすればいくらでも個数が大きくなるので, 次数に依らずに上限を評価することは不可能である. $n=1$ のときには 4 節 (2) のように, 次数を用いた表現が与えられており, 次数 $q+1$ のフェルマー曲線がその上限に到達する唯一の例である. 従って $n \geq 2$ についても同様のことが期待される.

今回の結果において, 著者らは, 任意標数で展開できるようにある程度の議論を運んでいる. 例えば, 超平面切断定理は任意標数で証明してある. どこが難しいか？実は, Key Lemma には標数零であることが必要である. 従って, Key Lemma やそれの代わりになるものを任意標数できちんと定式化できれば, 未解決問題 1 は解けるかもしれない.

9 節で紹介したように, ガロア点を無限個もつ錐ではない正規超曲面が存在するので, 正標数で同様の問題を考えると, 問題はより複雑になる.

**未解決問題 2.** $p>0$, $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を $s(X) \leq n-2$ を満たす錐でない超曲面とする. $\Delta(X)$ と $\Delta'(X)$ を決定せよ.

**謝辞.** 講演の機会を頂き, また多くの興味深い講演を聴かせて頂きました. 奥間智弘先生と世話人の先生方に感謝致します.

[8]曲線でも手こずった理由は, ガロア点からの射影の次数が $p$ で割れると wild ramification が必ず現れ, この扱いが難しかったからである. 興味深く難しい印象を与える例として, 標数 2 の Klein 4 次曲線がある. この曲線については, 適当に座標を取り替えると, $\Delta'(X)$ が $\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{F}_2$-有理点全体と一致する ([4]). 外ガロア点がちょうど 7 つ存在している.

## References


[1] F. Cools and M. Coppens, Star points on smooth hypersurfaces, J. Algebra **323** (2010), 261–286.

[2] S. Fukasawa, On the number of Galois points for a plane curve in positive characteristic, II, Geom. Dedicata **127** (2007), 131–137.

[3] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Proceedings of the IV Iberoamerican conference on complex geometry, Geom. Dedicata **139** (2009), 211–218.

[4] S. Fukasawa, On the number of Galois points for a plane curve in positive characteristic, III, Geom. Dedicata **146** (2010), 9–20.

[5] S. Fukasawa, Classification of plane curves with infinitely many Galois points, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 195–209.

[6] S. Fukasawa and T. Hasegawa, Singular plane curves with infinitely many Galois points, J. Algebra **323** (2010), 10–13.

[7] S. Fukasawa and T. Takahashi, Galois points for a normal hypersurface, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 1639–1658.

[8] M. Homma, Galois points for a Hermitian curve, Comm. Algebra **34** (2006), 4503–4511.

[9] K. Miura, Galois points on singular plane quartic curves, J. Algebra **287** (2005), 283–293.

[10] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226** (2000), 283–294.

[11] T. Takahashi, Galois points on normal quartic surfaces, Osaka J. Math. **39** (2002), 647–663.

[12] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340–355.

[13] H. Yoshihara, Galois points on quartic surfaces, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 731–743.

[14] H. Yoshihara, Galois points for smooth hypersurfaces, J. Algebra **264** (2003), 520–534.

[15] H. Yoshihara, Rational curve with Galois point and extendable Galois automorphism, J. Algebra **321** (2009), 1463–1472.

[16] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, available at http://hyoshihara.web.fc2.com/openquestion.html